Formulario di Matematica

Salvatore di Maggio

Indice

Capitolo 1

Disequazioni

Breve riepilogo

Disequazione	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	Valori esterni alle radici	Tutti i valori tranne $x = -\frac{b}{2a}$	Tutti i valori
$ax^2 + bx + c < 0$	Valori interni alle radici	Impossibile	Impossibile

Capitolo 2

Calcolo Combinatorio

Disposizioni

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Permutazioni

$$P_n = D_{n,n} = n!$$

Combinazioni

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Proprietà

$$0! = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{n-k}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$\begin{array}{lcccccccccc}
(a+b)^0 & \rightarrow & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^1 & \rightarrow & & & & 1 & & 1 & & & \\
(a+b)^2 & \rightarrow & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
(a+b)^3 & \rightarrow & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
(a+b)^4 & \rightarrow & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=2^{n-1}$$

Somme delle potenze dei numeri naturali

$$S_1=\sum_{x=1}^{n} x=\frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$S_2=\sum_{x=1}^{n} x^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

$$S_3=\sum_{x=1}^{n} x^3=\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

$$S_4=\sum_{x=1}^{n} x^4=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)\,(3n^2+3n-1)}{30}$$

Capitolo 3

Logaritmi

$$\log_a b = x \quad \Rightarrow \quad a^x = b$$

Proprietà

$$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$\mathrm{Log} 10^n = n$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Cambiamento di base

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Numeri a mantissa costante

Per $\log\left(N \cdot 10^k\right) = c.m$, m rimane costante per ogni k intero

Il cologaritmo

$$-\log N = \mathrm{colog} N$$

Capitolo 4

Trigonometria

Definizioni

$$\rho = \frac{l}{r} = \frac{\pi\,\alpha}{180} \quad \text{e inversamente} \quad \alpha = \frac{180\,\rho}{\pi}$$

Funzioni goniometriche e loro variazioni

Il seno e il coseno

Variazione di $\sin\alpha$	Variazione di $\cos\alpha$
$\sin 0 = \sin 0° = 0$	$\cos 0 = \cos 0° = 1$
$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = 1$	$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$
$\sin\pi = \sin 180° = 0$	$\cos\pi = \cos 180° = -1$
$\sin\frac{3}{2}\pi = \sin 270° = -1$	$\cos\frac{3}{2}\pi = \cos 270° = 0$
$\sin 2\pi = \sin 360° = 0$	$\cos 2\pi = \cos 360° = 1$
$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$	$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

La tangente

Variazione di $\tan\alpha$
$$\begin{array}{ccccc} \tan 0 & = & \tan 0^\circ & = & 0 \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) & = & \tan(90^\circ-\varepsilon) & = & +\infty \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) & = & \tan(90^\circ+\varepsilon) & = & -\infty \\ \tan\pi & = & \tan 180^\circ & = & 0 \\ \tan\left(\frac{3}{2}\,\pi-\varepsilon\right) & = & \tan(270^\circ-\varepsilon) & = & +\infty \\ \tan\left(\frac{3}{2}\,\pi+\varepsilon\right) & = & \tan(270^\circ+\varepsilon) & = & -\infty \\ \tan 2\,\pi & = & \tan 360^\circ & = & 0 \end{array}$$
$-\infty \leq \tan\alpha \leq +\infty$

La cotangente

Variazione di $\cot\alpha$
$$\begin{array}{ccccc} \cot(0+\varepsilon) & = & \cot(0^\circ+\varepsilon) & = & +\infty \\ \cot(0-\varepsilon) & = & \cot(0^\circ-\varepsilon) & = & -\infty \\ \cot\frac{\pi}{2} & = & \cot 90^\circ & = & 0 \\ \cot(\pi-\varepsilon) & = & \cot(180^\circ-\varepsilon) & = & -\infty \\ \cot(\pi+\varepsilon) & = & \cot(180^\circ+\varepsilon) & = & +\infty \\ \cot\frac{3}{2}\,\pi & = & \cot 270^\circ & = & 0 \\ \cot(2\,\pi-\varepsilon) & = & \cot(360^\circ-\varepsilon) & = & -\infty \\ \cot(2\,\pi+\varepsilon) & = & \cot(360^\circ+\varepsilon) & = & +\infty \end{array}$$
$-\infty \leq \cot\alpha \leq +\infty$

La secante e la cosecante

Variazione di $\sec\alpha$	Variazione di $\csc\alpha$
$\sec 0 = \sec 0° = 1$	$\csc(0-\varepsilon) = \csc(0°-\varepsilon) = -\infty$
$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) = \sec(90°-\varepsilon) = +\infty$	$\csc(0+\varepsilon) = \csc(0°+\varepsilon) = +\infty$
$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) = \sec(90°+\varepsilon) = -\infty$	$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90° = 1$
$\sec\pi = \sec 180° = -1$	$\csc(\pi-\varepsilon) = \csc(180°-\varepsilon) = +\infty$
$\sec\left(\frac{3}{2}\pi-\varepsilon\right) = \sec(270°-\varepsilon) = -\infty$	$\csc(\pi+\varepsilon) = \csc(180°+\varepsilon) = -\infty$
$\sec\left(\frac{3}{2}\pi+\varepsilon\right) = \sec(270°+\varepsilon) = +\infty$	$\csc\frac{3}{2}\pi = \csc 270° = -1$
$\sec 2\pi = \sec 360° = 1$	$\csc(2\pi-\varepsilon) = \csc(360°-\varepsilon) = -\infty$
	$\csc(2\pi+\varepsilon) = \csc(360°+\varepsilon) = +\infty$
$-\infty \leq \sec\alpha \leq -1$	$-\infty \leq \csc\alpha \leq -1$
$1 \leq \sec\alpha \leq +\infty$	$1 \leq \csc\alpha \leq +\infty$

Relazioni fondamentali fra le sei funzioni goniometriche

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Valori delle funzioni goniometriche mediante una sola di esse

Noto $\sin\alpha$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \\
\tan\alpha &= \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \\
\cot\alpha &= \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \\
\sec\alpha &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \\
\csc\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha}
\end{aligned}$$

Noto $\cos\alpha$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\
\tan\alpha &= \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \\
\cot\alpha &= \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \\
\sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} \\
\csc\alpha &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}
\end{aligned}$$

Noto $\tan\alpha$

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \\
\cot\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha} \\
\sec\alpha &= \pm\sqrt{1+\tan^2\alpha} \\
\csc\alpha &= \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}
\end{aligned}$$

Noto $\cot\alpha$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \pm\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} \\
\tan\alpha &= \frac{1}{\cot\alpha} \\
\sec\alpha &= \pm\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha} \\
\csc\alpha &= \pm\sqrt{1+\cot^2\alpha}
\end{aligned}$$

Archi associati

1° caso: $180° - \alpha$

$$\begin{aligned}
\sin(180° - \alpha) &= \sin\alpha \\
\cos(180° - \alpha) &= -\cos\alpha \\
\tan(180° - \alpha) &= -\tan\alpha \\
\cot(180° - \alpha) &= -\cot\alpha
\end{aligned}$$

2° caso: $180° + \alpha$

$$\begin{aligned}
\sin(180° + \alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(180° + \alpha) &= -\cos\alpha \\
\tan(180° + \alpha) &= \tan\alpha \\
\cot(180° + \alpha) &= \cot\alpha
\end{aligned}$$

3° caso: $-\alpha$ o $360° - \alpha$

$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\
\tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\
\cot(-\alpha) &= -\cot\alpha
\end{aligned}$$

Archi complementari

1° caso: $90° - \alpha$

$$\begin{aligned}
\sin(90° - \alpha) &= \cos\alpha \\
\cos(90° - \alpha) &= \sin\alpha \\
\tan(90° - \alpha) &= \cot\alpha \\
\cot(90° - \alpha) &= \tan\alpha
\end{aligned}$$

2° caso: $90° + \alpha$

$$\begin{aligned}
\sin(90° + \alpha) &= \cos\alpha \\
\cos(90° + \alpha) &= -\sin\alpha \\
\tan(90° + \alpha) &= -\cot\alpha \\
\cot(90° + \alpha) &= -\tan\alpha
\end{aligned}$$

Archi particolari

1° caso: 18°

$$\begin{aligned}
\sin 18^\circ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \\
\cos 18^\circ &= \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \\
\tan 18^\circ &= \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}} \\
\cot 18^\circ &= \sqrt{5+2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

2° caso: 30°

$$\begin{aligned}
\sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\
\cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\tan 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\
\cot 30^\circ &= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

3° caso: 45°

$$\begin{aligned}
\sin 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\tan 45^\circ &= 1 \\
\cot 45^\circ &= 1
\end{aligned}$$

4° caso: 60°

$$\begin{aligned}
\sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos 60^\circ &= \frac{1}{2} \\
\tan 60^\circ &= \sqrt{3} \\
\cot 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Formule di addizione e sottrazione

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\, \cos\beta \mp \sin\alpha\, \sin\beta \\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\, \cos\beta \pm \cos\alpha\, \sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\, \tan\beta} \\
\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\, \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}
\end{aligned}
$$

Formule di duplicazione

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\, \cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \\
\cot 2\alpha &= \frac{1 - \tan^2\alpha}{2\tan\alpha}
\end{aligned}
$$

Formule parametriche

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{2\,t}{1 + t^2} \\
\cos\alpha &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}
\end{aligned}
$$

Formule di bisezione

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \\
\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \\
\tan\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \pm\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}
\end{aligned}
$$

Valori di particolari tangenti

$$
\begin{aligned}
\tan 15^\circ &= 2 - \sqrt{3} \\
\tan 75^\circ &= 2 + \sqrt{3} \\
\tan 22^\circ 30' &= \sqrt{2} - 1 \\
\tan 67^\circ 30' &= \sqrt{2} + 1
\end{aligned}
$$

Formule di prostaferesi

$$
\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2\,\sin\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2\,\cos\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2} \\
\cos p + \cos q &= 2\,\cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2\,\sin\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2} \\
\sin^2 p - \sin^2 q &= \sin(p+q)\,\cdot\,\sin(p-q) \\
\cos^2 p - \cos^2 q &= \sin(p+q)\,\cdot\,\sin(q-p)
\end{aligned}
$$

Teorema fondamentale dei triangoli rettangoli

$$b = a\,\sin\beta$$

$$c = a\,\cos\beta$$

$$b = c\,\tan\beta$$

$$b = c\,\cot\gamma$$

Teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,R$$

dove R è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo.

Teorema dei coseni

$$a = c\,\cos\beta + b\,\cos\gamma$$

Teorema di Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$$

Teorema di Nepero

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

Formule di Briggs

Nelle formule qui sotto p è il semiperimetro

$$\boxed{\begin{aligned} \sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-b)}{b\,c}} \\ \sin\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{a\,c}} \\ \sin\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{a\,b}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}} \\ \cos\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}} \\ \cos\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tan\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-b)}{p\,(p-a)}} \\ \tan\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}} \\ \tan\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}} \end{aligned}}$$

Area di un triangolo

Essendo p il semiperimetro:

$$A = \frac{a\,c\,\sin\beta}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}\,c^2\,\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

$$A = p^2\,\tan\frac{\alpha}{2}\,\tan\frac{\beta}{2}\,\tan\frac{\gamma}{2}$$

Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo

$$r = (p-a)\,\tan\frac{\alpha}{2}$$

Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo

$$R = \frac{a\,b\,c}{4\,A}$$

Raggio della circonferenza exinscritta ad un triangolo

$$r_a = \frac{A}{p-a}$$

$$r_a = p\,\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$A = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

Area di un quadrilatero mediante le sue diagonali

$$A = \frac{1}{2}\,d_1\,d_2\,\sin\alpha$$

Capitolo 5

Geometria Analitica

5.1 Punti e rette

Punto medio di un segmento

$$\mathrm{M} = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}; \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$$

Equazione di una retta passante per un punto dato

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

Equazione di una retta passante per due punti dati

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Equazione segmentaria della retta

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Distanza di un punto da una retta

$$d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Condizione di parallelismo

$$m = m'$$

Condizione di perpendicolarità

$$m = -\frac{1}{m'}$$

Il coefficiente angolare

$$m = \tan\alpha$$
$$\tan\phi = \frac{m - m'}{1 + m\,m'}$$

Traslazione degli assi

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$

Rotazione degli assi

$$\begin{cases} x = X\,\cos\phi - Y\,\sin\phi \\ y = X\,\sin\phi + Y\,\cos\phi \end{cases} \quad \begin{cases} X = x\,\cos\phi + y\,\sin\phi \\ Y = -x\,\sin\phi + y\,\cos\phi \end{cases}$$

5.2 La circonferenza

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$\alpha = -\frac{a}{2}$$

$$\beta = -\frac{b}{2}$$

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - c > 0$$

Casi particolari

1° caso: $c = 0$

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y = 0$$

2° caso: $a = 0$

$$x^2 + y^2 + b\,y + c = 0$$

3° caso: $b = 0$

$$x^2 + y^2 + a\,x + c = 0$$

4° caso: $a = 0,\ c = 0$

$$x^2 + y^2 + b\,y = 0$$

5° caso: $b = 0,\ c = 0$

$$x^2 + y^2 + a\,x = 0$$

6° caso: $a = 0,\ b = 0$

$$x^2 + y^2 = -c$$

Formula di sdoppiamento

Ricavare la tangente a una circonferenza per un punto appartenente ad essa.

$$x_0\,x + y_0\,y + a\,\frac{x + x_0}{2} + b\,\frac{y + y_0}{2} + c = 0$$

Punti intersezione fra due circonferenze

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \qquad x^2 + y^2 + a'\,x + b'\,y + c' = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \\ \\ (a - a')\,x + (b - b')\,y + c - c' = 0 \end{cases}$$

5.3 La parabola

$$y = a\,x^2$$

$$\mathrm{F}\,(0; \frac{1}{4\,a})$$

La direttrice ha per equazione

$$y = -\frac{1}{4\,a}$$

$a > 0$ Concavità rivolta verso l'alto.
$a < 0$ Concavità rivolta verso il basso.

Tangente ad una parabola

$$\frac{y + y_0}{2} = a\,x_0\,x \qquad \text{Formula di sdoppiamento}$$

Parabola con il vertice su un punto $\mathrm{V}\,(x_0; y_0)$, con $x_0 \neq 0;\ y \neq 0$

Elementi della parabola di equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

$$V\left(-\frac{b}{2\,a};\ -\frac{\Delta}{4\,a}\right)\ ; \quad F = \left(-\frac{b}{2\,a};\ \frac{1-\Delta}{4\,a}\right)$$

L'equazione della direttrice sarà:

$$y = -\frac{1+\Delta}{4\,a}$$

5.4 L'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{dove } a \text{ e } b \text{ sono i semiassi.}$$

5.5 L'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{dove } 2\,a \text{ è la distanza fra i due vertici.}$$

Capitolo 6

Analisi Matematica

6.1 Limiti

Teorema del limite notevole

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Limiti notevoli di Cavalieri

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + x^2}{x^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + x^3}{x^4} = \frac{1}{4}$$

Il numero e di Nepero

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Altri limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

6.2 Derivate

Rappresentazione grafica della derivata di una funzione

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\phi = m$$

Teoremi sul calcolo delle derivate

$$D\ [a \cdot f(x)] = a \cdot f'(x)$$

$$D\ [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

$$D\ [f(x) \cdot g(x)] = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

$$D\,[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) \ldots] = f_1'(x)\, f_2(x)\, f_3(x) \ldots + f_1(x)\, f_2'(x)\, f_3(x) \ldots + f_1(x)\, f_2(x)\, f_3'(x) \ldots$$

$$D\,[f(x)]^n = n\, f'(x)\,[f(x)]^{n-1}$$

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\, g(x) - g'(x)\, f(x)}{[g(x)]^2}$$

$$Df[g(x)] = f'[g(x)]\, g'(x)$$

Funzioni invertibili

$$y = f(x) \qquad x = F(y)$$

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Tabella sinottica delle derivate notevoli più comuni

Funzione	Derivata
$y = C$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n\,x^{n-1}$
$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y' = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x\,\ln a} = \dfrac{1}{x}\log_a e$
$y = \text{arcsin } x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arccos } x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \text{arctan } x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \text{arccot}\, x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Teorema di Lagrange o di Cavalieri o del valor medio

$$f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(c)$$

Teorema di Rolle

$$f(b) = f(a) \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 0$$

Regola di de l'Hôpital $\left(\dfrac{0}{0}\,,\ \dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Studio di una funzione

Funzioni crescenti e decrescenti

$$f'(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad y = f(x) \text{ crescente}$$

$$f'(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad y = f(x) \text{ decrescente}$$

Massimi e minimi

$$\begin{cases} f'(c) = 0 \\ f''(c) < 0 \end{cases} \quad \text{esiste un massimo}$$

$$\begin{cases} f'(c) = 0 \\ f''(c) > 0 \end{cases} \quad \text{esiste un minimo}$$

Concavità e convessità

$$f''(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la funzione è convessa}$$

$$f''(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la funzione è concava}$$

Flessi

$$f^{(2n)}(c) = 0 \begin{cases} f^{(2n+1)}(c) > 0 & \text{flesso ascendente} \\ f^{(2n+1)}(c) < 0 & \text{flesso discendente} \end{cases}$$

Asintoti

1. **Asintoti verticali**

$$x = k \quad \text{Equazione dell'asintoto verticale con} \quad \lim_{x \to k} f(x) = \infty$$

2. **Asintoti orizzontali**

$$y = l \quad \text{Equazione dell'asintoto orizzontale con} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

3. **Asintoti obliqui**

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - m\,x]$$

Riassumendo

Per studiare una funzione si trova:

1. Campo di esistenza: tutti i valori di x tranne quelli che annullano il denominatore;
2. Asintoti: verticali, orizzontali, obliqui;
3. Intersezioni con gli assi;
4. Positività della funzione: si pone $y > 0$ e si trovano le x;
5. Crescenza, decrescenza, massimi, minimi e flessi;
6. Concavità e convessità.

Serie di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \ .$$

Sviluppi notevoli di Mac Laurin

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k \ . \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ x^k \ . \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \ \frac{x^k}{k} \ . \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \ x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} \ x^k \ . \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \ . \\
\arcsin x &= x + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)} \ x^{2k+1} \ . \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)} \ x^{2k+1} \ . \\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \ . \\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^2 k}{(2k)!} \ . \\
\text{arcsinh}\, x &= x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)} \ x^{2k+1} \ .
\end{aligned}$$

6.3 Integrali

$$k \int f(x)\ \mathrm{d}x = \int k\, f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int f_1(x) + \int f_2(x) + \ldots = \int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots]\ \mathrm{d}x$$

Integrazione per parti

$$\int u'(x)\, v(x)\ \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)\, v'(x)\ \mathrm{d}x$$

Integrali notevoli

1. $\displaystyle\int x^n\, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\displaystyle\int \mathrm{d}x = x + C$
3. $\displaystyle\int \ln x\, \mathrm{d}x = x\, \ln x - x + C$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$
5. $\displaystyle\int \cos x\, \mathrm{d}x = \sin x + C$
6. $\displaystyle\int \sin x\, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
7. $\displaystyle\int \mathrm{d}x = \tan x + C$
8. $\displaystyle\int \mathrm{d}x = -\cot x + C$
9. $\displaystyle\int e^x\, \mathrm{d}x = e^x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$
11. $\displaystyle\int \cot x\, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
12. $\displaystyle\int \tan x\, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$
13. $\displaystyle\int [f(x)]^n\, f'(x)\, \mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$
14. $\displaystyle\int f'(x) \sin f(x)\, \mathrm{d}x = -\cos f(x) + C$
15. $\displaystyle\int f'(x) \cos f(x)\, \mathrm{d}x = \sin f(x) + C$
16. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}\, \mathrm{d}x = -\cot f(x) + C$
17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\, \mathrm{d}x = \tan f(x) + C$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$

Integrali definiti

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Volume di un solido di rotazione

$$V(x) = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

6.4 Integrali avanzati

Integrali vettoriali

$$\int_{S_{chiusa}} \vec{v}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{(Teorema di Gauss o della divergenza)}$$

$$\oint_l \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\wedge\vec{v}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S \qquad \text{(Teorema di Stokes o del rotore)}$$

$$\oint_l P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}S \qquad \text{(Teorema di Green)}$$

Integrale di Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\,x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

Trasformata di Fourier

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Antitrasformata di Fourier

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \int_{\mathbb{R}} F(\omega)\,e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Trasformate di Fourier notevoli

$g(t) = f(t-a)$	$G(\omega) = e^{-i\omega a}\, F(\omega)$
$g(t) = e^{i\omega_0 t}$	$G(\omega) = F(\omega - \omega_0)$
$g(t) = f(a \cdot t)$	$G(\omega) = \dfrac{1}{\lvert a\rvert}\, F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
$g(t) = t\, f(t)$	$G(\omega) = i\, \dfrac{\mathrm{d}F(\omega)}{\mathrm{d}\omega}$
$g(t) = f'(t)$	$G(\omega) = i\,\omega\, F(\omega)$
$f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$	$F(\omega) = \pi\, e^{-\lvert\omega\rvert}$
$f(t) = \dfrac{1}{a^2+t^2}$	$F(\omega) = \dfrac{\pi}{a}\, e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$f(t) = e^{-\lvert t\rvert}$	$F(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$
$f(t) = e^{-a\lvert t\rvert}$	$F(\omega) = \dfrac{2\,a}{a^2+\omega^2}$
$f(t) = e^{-t^2}$	$F(\omega) = \sqrt{\pi}\, e^{-\dfrac{\omega^2}{4}}$
$f(t) = e^{-at^2}\,,\ a > 0$	$F(\omega) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\dfrac{\omega^2}{4a}}$
$f(t) = \chi_{[-a,a]}(t)$	$F(\omega) = 2\, \dfrac{\sin a\,\omega}{\omega}$
$f(t) = (a+t)\,\chi_{[-a,0]}(t) + (a-t)\,\chi_{[0,a]}(t)$	$F(\omega) = 2\, \dfrac{1-\cos a\,\omega}{\omega^2}$
$f(t) = \dfrac{\sin^2 a\,t}{t^2}\,,\ a > 0$	$F(\omega) = \pi\,(a + \dfrac{\omega}{2})\,\chi_{[-2a,0]}(\omega) + \pi\,(a - \dfrac{\omega}{2})\,\chi_{[0,2a]}(\omega)$
$f(t) = -\chi_{[-a,0]}(t) + \chi_{[0,a]}(t)\,,\ a > 0$	$F(\omega) = -2\,i\, \dfrac{1-\cos a\,\omega}{\omega}$
$f(t) = \dfrac{1}{(a^2+t^2)\,(b^2+t^2)}\,,\ a \neq b$	$F(\omega) = \dfrac{\pi\,(b^{-1}e^{-b\lvert\omega\rvert} - a^{-1}e^{-a\lvert\omega\rvert})}{a^2-b^2}$
$f(t) = \dfrac{1}{(a^2+t^2)^2}$	$F(\omega) = \dfrac{\pi}{2\,a^3}\,(a\,\lvert\omega\rvert + 1)\, e^{-a\lvert\omega\rvert}$
$f(t) = \dfrac{1}{a^4+t^4}$	$F(\omega) = \dfrac{\pi}{a^3}\, e^{-a\lvert\omega\rvert/\sqrt{2}}\, \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{a\,\lvert\omega\rvert}{\sqrt{2}}\right)$
$f(t) = \dfrac{\sin t}{t}\, e^{-\lvert t\rvert}$	$F(\omega) = \arctan \dfrac{2}{\omega^2}$
$h(t) = f(t) * g(t)$	$H(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega)$
$h(t) = f(t) \cdot g(t)$	$F(\omega) = \dfrac{1}{2\,\pi}\, F(\omega) * G(\omega)$

Capitolo 7

Operazioni vettoriali

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\, \vec{a}$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})\, (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge (\vec{c} \wedge \vec{d}) = [(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{d}]\, \vec{c} - [(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}]\, \vec{d}$$

L'operatore $\vec{\nabla}$ (Nabla)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\, \hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\, \hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\, \hat{k}$$

Il Gradiente di una funzione

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\, \hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\, \hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\, \hat{k}$$

La Divergenza di un vettore

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Il Rotore di un vettore

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\imath} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Proprietà del $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$$

$$\vec{\nabla}(fg) = f\,\vec{\nabla} g + g\,\vec{\nabla} f$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{a} + \vec{a}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{b}) + \vec{b}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{a})$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{b} = (\vec{a}\cdot\vec{\nabla} b_x)\hat{\imath} + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla} b_y)\hat{\jmath} + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla} b_z)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(f\,\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{\nabla} f + f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{b})$$

$$\vec{\nabla}\wedge(f\,\vec{a}) = f\,(\vec{\nabla}\wedge\vec{a}) + \vec{\nabla} f\wedge\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{b})\,\vec{a} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{a})\,\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{b} + (\vec{b}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{a}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla} f = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = 0$$

Il Laplaciano

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Il Laplaciano vettoriale

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} = \nabla^2\vec{v} = \nabla^2 v_x\hat{\imath} + \nabla^2 v_y\hat{\jmath} + \nabla^2 v_z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\wedge\vec{v} = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{v} - \nabla^2\vec{v}$$

La Derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (\vec{\nabla} f)\cdot\hat{n}$$