Compendio di Matematica del Liceo

Salvatore di Maggio

14 settembre 2011

Indice

1 Disequazioni **7**
1.1 Breve riepilogo . . . 7

2 Calcolo Combinatorio **9**
2.1 Disposizioni . . . 9
2.2 Permutazioni . . . 10
2.3 Combinazioni . . . 10
2.3.1 Casi particolari . . . 11
2.3.2 Legge di Stiffel o legge di addizione . . . 11
2.3.3 Legge di ricorrenza . . . 12
2.3.4 Potenza n-esima di un binomio . . . 12
2.3.5 Triangolo di Tartaglia . . . 13
2.3.6 Regola di Newton . . . 14
2.3.7 Somme di coefficienti binomiali . . . 14
2.3.8 Somma delle potenze simili dei numeri naturali . . . 15

3 Logaritmi **17**
3.1 Teoremi fondamentali . . . 17
3.1.1 Prodotto di due numeri . . . 17
3.1.2 Quoziente di due numeri . . . 17
3.1.3 Potenza di un numero . . . 18
3.1.4 Radice n-esima di un numero . . . 18
3.1.5 Cambiamento di base . . . 18
3.1.6 Logaritmo decimale di una potenza di 10 . . . 19
3.1.7 Logaritmo decimale di un numero qualsiasi . . . 19
3.1.8 Numeri a mantissa costante . . . 19
3.2 Metodi ed esempi . . . 20
3.2.1 Calcolo del logaritmo . . . 20
3.2.2 Il cologaritmo . . . 20
3.2.3 L'antilogaritmo . . . 21

4 Trigonometria **23**
4.1 Definizioni . . . 23
4.2 Funzioni goniometriche e loro variazioni . . . 24
4.2.1 Il seno e il coseno . . . 24
4.2.2 La tangente . . . 25
4.2.3 La cotangente . . . 25
4.2.4 La secante e la cosecante . . . 26
4.3 Relazioni fondamentali fra le sei funzioni goniometriche . . . 27
4.4 Valori delle funzioni goniometriche mediante una sola di esse . . . 29
4.4.1 Noto $\sin\alpha$ . . . 29
4.4.2 Noto $\cos\alpha$ . . . 29
4.4.3 Noto $\tan\alpha$ . . . 29
4.4.4 Noto $\cot\alpha$ . . . 30
4.5 Archi associati . . . 30

4.5.1 1° caso: $180° - \alpha$ . . . 31
4.5.2 2° caso: $180° + \alpha$ . . . 31
4.5.3 3° caso: $-\alpha$ o $360° - \alpha$ . . . 32
4.6 Archi complementari . . . 32
4.6.1 1° caso: $90° - \alpha$ . . . 33
4.6.2 2° caso: $90° + \alpha$ . . . 33
4.7 Archi particolari . . . 34
4.7.1 1° caso: 18° . . . 34
4.7.2 2° caso: 30° . . . 35
4.7.3 3° caso: 45° . . . 35
4.7.4 4° caso: 60° . . . 36
4.8 Formule di addizione e sottrazione . . . 36
4.8.1 Coseno della differenza di due archi . . . 36
4.8.2 Coseno della somma di due archi . . . 37
4.8.3 Seno della differenza di due archi . . . 37
4.8.4 Seno della somma di due archi . . . 37
4.8.5 Tangente della somma/differenza di due archi . . . 37
4.8.6 Cotangente della somma/differenza di due archi . . . 38
4.9 Formule di duplicazione . . . 38
4.9.1 Seno dell'angolo doppio . . . 38
4.9.2 Coseno dell'angolo doppio . . . 38
4.9.3 Tangente dell'angolo doppio . . . 38
4.9.4 Cotangente dell'angolo doppio . . . 38
4.10 Formule parametriche . . . 39
4.10.1 1° caso: $\sin\alpha$ . . . 39
4.10.2 2° caso: $\cos\alpha$ . . . 39
4.11 Formule di bisezione . . . 40
4.11.1 Valori di particolari tangenti . . . 41
4.12 Formule di prostaferesi . . . 41
4.13 Equazioni goniometriche . . . 42
4.13.1 Equazioni elementari . . . 42
4.13.2 Equazioni lineari . . . 43
4.13.3 Equazioni quadratiche . . . 43
4.14 Teorema fondamentale dei triangoli rettangoli . . . 44
4.15 Teorema dei seni . . . 45
4.16 Teorema dei coseni . . . 46
4.17 Teorema di Carnot . . . 47
4.18 Teorema di Nepero . . . 47
4.19 Formule di Briggs . . . 48
4.20 Area di un triangolo . . . 49
4.21 Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo . . . 50
4.22 Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo . . . 51
4.23 Raggio della circonferenza exinscritta ad un triangolo . . . 51
4.24 Area di un quadrilatero mediante le sue diagonali . . . 52

5 Geometria Analitica **53**
5.1 Prime definizioni, punti e rette . . . 53
5.1.1 Ascissa del punto medio di un segmento . . . 53
5.1.2 Distanza di due punti . . . 53
5.1.3 Punto medio di un segmento . . . 53
5.1.4 Equazione dell'asse delle ordinate y . . . 54
5.1.5 Equazione dell'asse delle ascisse x . . . 54
5.1.6 Equazione di una retta passante per un punto dato . . . 54
5.1.7 Equazione di una retta passante per due punti dati . . . 55
5.1.8 Equazione segmentaria della retta . . . 55
5.1.9 Distanza di un punto da una retta . . . 56
5.1.10 Condizione di parallelismo . . . 56

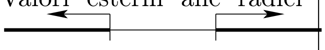
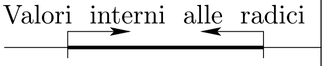
5.1.11 Condizione di perpendicolarità . . . 58
5.1.12 Il coefficiente angolare . . . 58
5.2 Traslazione degli assi . . . 59
5.3 Rotazione degli assi . . . 59
5.4 La circonferenza . . . 60
5.4.1 Casi particolari . . . 61
5.4.2 Formula di sdoppiamento . . . 63
5.4.3 Punti intersezione fra due circonferenze . . . 63
5.5 La parabola . . . 64
5.5.1 Tangente ad una parabola . . . 65
5.5.2 Parabola con il vertice su un punto $\mathrm{P}\left(x_0; y_0\right)$, dove $x_0 \neq 0;\ y \neq 0$ . . . 65
5.6 L'ellisse . . . 66
5.6.1 Proprietà dell'ellisse . . . 67
5.6.2 Costruzione dell'ellisse per punti dati i semiassi $\overline{\mathrm{OA}} = a$ e $\overline{\mathrm{OB}} = b$ . . . 69
5.7 L'iperbole . . . 69

6 Analisi Matematica **71**
6.1 Limiti . . . 71
6.1.1 Operazioni sui limiti . . . 76
6.1.2 Continuità di una funzione . . . 81
6.1.3 Teorema del limite notevole . . . 81
6.1.4 Limiti notevoli di Cavalieri . . . 82
6.1.5 Il numero e di Nepero . . . 83
6.1.6 Altri limiti notevoli . . . 85
6.1.7 Limite di una funzione razionale intera . . . 85
6.1.8 Limite di una funzione razionale fratta . . . 85
6.2 Derivate . . . 87
6.2.1 Rappresentazione grafica del rapporto incrementale . . . 87
6.2.2 Rappresentazione grafica della derivata di una funzione . . . 88
6.2.3 Derivate particolari . . . 89
6.2.4 Teoremi sul calcolo delle derivate . . . 91
6.2.5 Funzioni invertibili . . . 93
6.2.6 Tabella sinottica delle derivate notevoli più comuni . . . 96
6.2.7 Teorema di Lagrange o di Cavalieri o del valor medio . . . 96
6.2.8 Teorema di Rolle . . . 97
6.2.9 Regola di de l'Hôpital . . . 97
6.2.10 Studio di una funzione . . . 97
6.2.11 Applicazioni fisiche delle derivate . . . 107
6.3 Integrali . . . 111
6.3.1 Integrali indefiniti . . . 111
6.3.2 Integrazione per parti . . . 112
6.3.3 Integrali notevoli . . . 112
6.3.4 Integrali definiti . . . 113
6.3.5 Proprietà degli integrali definiti . . . 115
6.3.6 Applicazioni degli integrali . . . 116
6.3.7 Volume di un solido di rotazione . . . 118

Capitolo 1

Disequazioni

1.1 Breve riepilogo

Disequazione	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c > 0$	Valori esterni alle radici  x_1 x_2	Tutti i valori tranne $x = -\dfrac{b}{2a}$	Tutti i valori
$ax^2 + bx + c < 0$	Valori interni alle radici  x_1 x_2	Impossibile	Impossibile

Capitolo 2

Calcolo Combinatorio

Il calcolo combinatorio studia i raggruppamenti possibili di certi elementi seguendo delle regole particolari.

2.1 Disposizioni

Definizione 1. *Le* **Disposizioni** *sono gli insiemi di k elementi che si possono formare da n elementi dati (con $k \leq n$), in modo che un insieme si differenzi da ogni altro almeno per un elemento oppure per l'ordine.*

Le disposizioni si indicano con $D_{n,k}$ che si legge "Disposizioni di n elementi di classe k" (o "a k a k").
Avendo n elementi $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$, si ha:

$$D_{n,1} = n$$

$$D_{n,2} = n(n-1)$$

infatti:

$$n \left\{ \underbrace{\begin{matrix} a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & a_na_{n-1} \end{matrix}}_{n-1} \right.$$

e inoltre

$$D_{n,3} = n(n-1)(n-2)$$

infatti

$$\boxed{a_1a_2}a_3 \qquad \boxed{a_1a_2}a_4 \qquad \cdots \qquad \boxed{a_1a_2}a_n$$

per ogni $D_{n,2}$ ci sono $n-2$ elementi con cui si può formare un insieme di classe 3. Quindi con $D_{n,k}$ si hanno k fattori consecutivi decrescenti a partire da n, cioè

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]$$
$$\boxed{D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$$

2.2 Permutazioni

Definizione 2. *Si chiamano* **Permutazioni semplici** *tutti gli insiemi che si possono formare usando tutti gli n elementi*

Disposizioni: $n \geq k$
Permutazioni: $n = k$

$$\boxed{P_n = D_{n,n} = n!}$$

$n!$ è detto *n fattoriale* ed è pari a n fattori consecutivi decrescenti fino a 1 a partire da n. Si vede subito dal fatto che

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)$$

e quindi, sostituendo k con n,

$$D_{n,n} = n(n-1)(n-2)\dots\cdot 2\cdot 1$$

si ottiene $n! = n(n-1)(n-2)\dots\cdot 2\cdot 1$

2.3 Combinazioni

Definizione 3. *Si chiamano* **Combinazioni** *di n elementi di classe k, con $k < n$, gli insiemi che si possono formare in modo che ognuno si differenzi da un altro almeno per un elemento.*

Avendo quattro elementi a_1, a_2, a_3 e a_4:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \left\{ \{a_1a_2a_3\}, \{a_1a_3a_4\}, \{a_2a_3a_4\}, \{a_1a_2a_4\} \right\}.$$

Facendo una P_k per ogni $C_{n,k}$

$$P_k \left\{ \underbrace{\begin{array}{cccc} a_1a_2a_3 & a_1a_2a_4 & a_1a_3a_4 & a_2a_3a_4 \\ a_1a_3a_2 & a_1a_4a_2 & a_1a_4a_3 & a_2a_4a_3 \\ a_2a_1a_3 & a_2a_1a_4 & a_3a_1a_4 & a_3a_2a_4 \\ a_2a_3a_1 & a_2a_4a_1 & a_3a_4a_1 & a_3a_4a_2 \\ a_3a_2a_1 & a_4a_2a_1 & a_4a_1a_3 & a_4a_2a_3 \\ a_3a_1a_2 & a_4a_1a_2 & a_4a_3a_1 & a_4a_3a_2 \end{array}}_{C_{n,k}} \right.$$

Da questo schema si può vedere che tutti gli insiemi rappresentano $D_{n,k}$, per cui

$$D_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k$$

da cui

$$\boxed{C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{P_k}}$$

Esplicitando la formula appena scritta:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

moltiplicando numeratore e denominatore per $(n-k)!$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!\,(n-k)!}$$

si arriva infine a

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

Il simbolo $\binom{n}{k}$ è detto *coefficiente binomiale* o *classe complementare.*

. . . .

2.3.1 Casi particolari

È immediato vedere che

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Ora osserviamo che

$$\binom{n}{n} = C_{n,n} = 1$$

ma è vero anche che

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{1}{0!}$$

Essendo uguali i primi membri, sono uguali gli ultimi membri, per cui si conclude che $\frac{1}{0!} = 1$, cioè

$$\boxed{0! = 1}$$

Vale anche

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Si consideri ora

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k},$$

da cui si deduce

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

. . . .

2.3.2 Legge di Stiffel o legge di addizione

Sappiamo che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ .$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \\ &= \frac{(n-1)!\,(n-k) + (n-1)!k}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{k!\,(n-k)!} = \\ &= \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\ .\end{aligned}$$

Essendo uguali gli ultimi membri, sono uguali anche i primi membri, da cui si ricava

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{n-k}}$$

. . . .

2.3.3 Legge di ricorrenza

Si ha che

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

e inoltre

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{n-k}{k+1} = \\ &= \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)\,k!\,(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}\end{aligned}$$

Essendo uguali gli ultimi membri, sono uguali anche i primi membri, per cui

$$\boxed{\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}}$$

. . . .

2.3.4 Potenza n-esima di un binomio

Consideriamo le due moltiplicazioni di binomi:

$$(a+b_1)(a+b_2) = a^2 + a(b_1+b_2) + b_1b_2$$

$$\begin{aligned}(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3) &= [a^2 + a(b_1+b_2) + b_1b_2](a+b_3) = \\ &= a^3 + a^2(b_1+b_2+b_3) + a(b_1b_3 + b_2b_3 + b_1b_2) + b_1b_2b_3\end{aligned}$$

Poniamo

$$\begin{aligned}b_1+b_2+b_3 &= c_{3,1}\,, \\ b_1b_3+b_2b_3+b_1b_2 &= c_{3,2}\,, \\ b_1b_2b_3 &= c_{3,3}\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che:

1. l'espressione finale contiene tanti termini quanti binomi si moltiplicano, più uno;
2. gli esponenti di a sono decrescenti;
3. dal 2° termine i coefficienti sono la somma delle combinazioni di b_1, b_2 e b_3,

per cui

$$\begin{aligned}(a+b_1)(a+b_2)\dots(a+b_n) &= a^n + a^{n-1}(b_1+b_2+\ldots+b_n) + \\ &\quad + a^{n-2}(b_1b_2+\ldots+b_{n-1}b_n+\ldots+b_1b_2\dots b_n\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}b_1+b_2+\ldots+b_n &= C_{n,1} \\ b_1b_2+\ldots+b_{n-1}b_n &= C_{n,2} \\ &\dots \\ b_1b_2\dots b_n &= C_{n,n}\end{aligned}$$

Ponendo $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = b$, si ottiene

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + a^{n-1}\underbrace{(b+b+\ldots+b)}_{C_{n,1}} + a^{n-2}\underbrace{b^2+b^2+\ldots+b^2}_{C_{n,2}} + \ldots + \underbrace{b^n}_{C_{n,n}} \\ (a+b)^n &= a^n + c_{n,1}ba^{n-1} + c_{n,2}b^2a^{n-2} + \ldots + c_{n,n}b^n \\ (a+b)^n &= \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}ba^{n-1} + \binom{n}{2}b^2a^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}b^n\end{aligned}$$

- La classe k dunque aumenta,
- L'esponente di a è dato da $n-k$,
- L'esponente di b è dato da k.

Per cui si può affermare che

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k} \text{ con } 0 \le k \le n$$

. . . .

2.3.5 Triangolo di Tartaglia

Abbiamo visto che

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \, .$$

Inoltre, per una proprietà delle classi complementari

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \, .$$

Ponendo $k = 0$:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} \, ;$$

ponendo $k = 1$:

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} \, ;$$

per $k = 2$:

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} \, .$$

Osservazione: $\binom{n}{0}$ e $\binom{n}{n}$ sono i coefficienti estremi della progressione; $\binom{n}{1}$ e $\binom{n}{n-1}$ sono rispettivamente il secondo e il penultimo termine della progressione, come $\binom{n}{2}$ e $\binom{n}{n-2}$ sono il terzo e il terz'ultimo, e così via. Perciò si può affermare che:

Tutti i termini equidistanti dagli estremi sono uguali per il coefficiente.
Mediante uno schema:

$$\begin{array}{llccccccccc}
(a+b)^0 & \rightarrow & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^1 & \rightarrow & & & & 1 & & 1 & & & \\
(a+b)^2 & \rightarrow & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
(a+b)^3 & \rightarrow & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
(a+b)^4 & \rightarrow & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Come si vede, tutti i coefficienti equidistanti dagli estremi sono uguali e per trovarne uno basta addizionare i due termini soprastanti.

. . . .

2.3.6 Regola di Newton

Avendo $(a+b)^n$ abbiamo visto che per trovare un termine qualsiasi si applica

$$a_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Il termine successivo è

$$a_{k+2} = \binom{n}{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1}$$

ma

$$\boxed{\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}} \qquad \text{(binomio di Newton)}$$

Ora

$n-k$ è l'esponente di a nel termine precedente;

$k+1$ è l'esponente di b nel termine precedente, aumentato di uno;

$\binom{n}{k}$ è il coefficiente del termine precedente;

per cui:

Teorema 1. *Il coefficiente di un termine qualsiasi di $(a+b)^n$ si ottiene moltiplicando il coefficiente del termine precedente per la sua potenza di a e diviso la sua potenza di b aumentata di 1.*

Il primo termine si calcola invece col Σ.

. . . .

2.3.7 Somme di coefficienti binomiali

. . . .

Teorema 2. *La somma dei coefficienti binomiali relativi a n è uguale a 2^n.*

Infatti, avendo

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

e ponendo $a = b = 1$,

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

come si voleva dimostrare.

. . . .

Teorema 3. *La somma dei coefficienti binomiali di posto dispari è uguale alla somma dei coefficienti binomiali di posto pari e uguale a 2^{n-1}.*

Infatti, avendo

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

e ponendo $a = 1$ e $b = -1$,

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots$$

ovvero

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$$

Essendo poi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^n$$

si ottiene

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^n/2 = 2^{n-1}$$

come si voleva dimostrare.

. . . .

2.3.8 Somma delle potenze simili dei numeri naturali

Consideriamo i numeri $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ corrispondenti ad $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

Indichiamo con S_1 la somma di tutti i numeri della successione considerata:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n$$

Per le proprietà delle progressioni aritmetiche:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

e perciò

$$S_1 = \frac{n\,(1+n)}{2}$$

Indichiamo con S_2 la somma dei quadrati di tutti i numeri della successione anzi considerata

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2$$

Per calcolare S_2 si parte da $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$:

$$\begin{array}{rl}
\text{per } x = 1, & 2^3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1^3 \\
\text{per } x = 2, & 3^3 = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3 \\
\text{per } x = 3, & 4^3 = 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3^3 \\
\ldots & \\
\text{per } x = n, & (1+n)^3 = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2 + n^3
\end{array}$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$\begin{aligned}
1 + 3n + 3n^2 + n^3 &= n + 3S_1 + 3S_2 + 1 \\
1 + 3n + 3n^2 + n^3 &= n + 3\frac{n(1+n)}{2} + 3S_2 + 1 \\
6S_2 &= 2n^3 + 6n^2 + 4n - 3n^2 - 3n \\
6S_2 &= 2n^3 + 3n^2 + n
\end{aligned}$$

Da cui si ottiene

$$\boxed{S_2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}}$$

Analogamente si trova

$$\boxed{S_3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2}$$

$$\boxed{S_4 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)\,(3n^2+3n-1)}{30}}$$

Capitolo 3

Logaritmi

Definizione 4. *Il logaritmo in base positiva e diversa da 1 di un numero positivo è l'esponente da dare alla base per ottenere il numero dato.*

$$\log_a b = x \ (a = \text{base}, \ b = \text{numero dato}), \Rightarrow a^x = b$$

3.1 Teoremi fondamentali

3.1.1 Prodotto di due numeri

Teorema 4. *Il logaritmo del prodotto di due numeri è pari alla somma dei logaritmi dei singoli numeri.*

Siano dati

$$\log_a b = x \quad \text{e} \quad \log_a c = y$$

per la definizione di logaritmo abbiamo

$$a^x = b \quad \text{e} \quad a^y = c$$

moltiplicando membro a membro si ottiene

$$a^{x+y} = b \cdot c$$

da cui per la definizione di logaritmo

$$\log_a b \cdot c = x + y$$

cioè

$$\boxed{\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c}$$

3.1.2 Quoziente di due numeri

Teorema 5. *Il logaritmo del quoziente di due numeri è pari alla differenza dei logaritmi dei singoli numeri.*

Siano dati

$$\log_a b = x \quad \text{e} \quad \log_a c = y$$

per la definizione di logaritmo abbiamo

$$a^x = b \quad \text{e} \quad a^y = c$$

dividendo membro a membro si ottiene

$$a^{x-y} = \frac{b}{c}$$

da cui per la definizione di logaritmo

$$\log_a \frac{b}{c} = x - y$$

cioè

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c}$$

. . . .

3.1.3 Potenza di un numero

Teorema 6. *Il logarimto della potenza di un numero è pari al prodotto dell'esponente per il logaritmo del numero.*

Partiamo dal fatto che

$$\log_a b^n = \log_a(\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n})$$

per il teorema sul logaritmo del prodotto di due numeri abbiamo

$$\log_a b^n = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \ldots + \log_a b}_{n}$$

e quindi si ha

$$\boxed{\log_a b^n = n \cdot \log_a b}$$

. . . .

3.1.4 Radice n-esima di un numero

Teorema 7. *Il logaritmo della radice di un numero è pari al quoziente del logaritmo del numero fratto l'indice della radice.*

È immediato vedere che

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}}$$

e quindi, per il teorema sul logaritmo della potenza di un numero

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b}$$

. . . .

3.1.5 Cambiamento di base

Supponiamo di conoscere il logaritmo $\log_a N$ in base a di un qualsiasi numero N; vogliamo calcolare $\log_b N = x$ (con $b \neq 10$ in quanto $\log_{10} N = \mathrm{Log} N$ è sempre noto e perde quindi di significato lo studio qui descritto).

Abbiamo che

$$\log_b N = x \quad \Rightarrow \quad b^x = N \quad \Rightarrow \quad \log_a b^x = \log_a N$$

cioè, per il teorema sul logaritmo della potenza di un numero

$$x \cdot \log_a b = \log_a N \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

che infine possiamo scrivere come

$$\boxed{\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}}$$

Nel caso in cui $a = 10$:

$$\log_b N = \frac{\text{Log}N}{\text{Log}b} \ ;$$

mentre se $a = N$ si ha

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \ .$$

D'ora in avanti, laddove non sia indicata espressamente la base di un logaritmo, si intenderà:
Log: logaritmo in base 10;
ln: logaritmo naturale o in base e (numero di Nepero).

. . . .

3.1.6 Logaritmo decimale di una potenza di 10

Teorema 8. *Il logaritmo decimale di una potenza di 10 è pari all'esponente della potenza.*

È banale vedere che

$$\text{Log}10^n = n \cdot \text{Log}10 = n \cdot 1 = n$$

e quindi

$$\boxed{\log 10^n = n}$$

. . . .

3.1.7 Logaritmo decimale di un numero qualsiasi

Teorema 9. *Il logaritmo decimale di un numero non multiplo di 10 è un numero irrazionale.*

$$10^{\frac{r}{s}} = N \quad \Rightarrow \quad (2 \cdot 5)^{\frac{r}{s}} = N \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{r}{s}} \cdot 5^{\frac{r}{s}} = N$$

cioè N dovrebbe contenere $2^{\frac{r}{s}} \cdot 5^{\frac{r}{s}}$, ma siccome N non è multiplo di 10, non li contiene, quindi $\log N$ è un numero irrazionale, dato cioè dal rapporto fra due numeri interi r ed s non multipli fra loro.

$$\boxed{\log N = \frac{r}{s} \qquad \left(\frac{r}{s} \text{ irrazionale}\right)}$$

. . . .

3.1.8 Numeri a mantissa costante

Teorema 10. *Tutti i prodotti di un numero fissato per una qualsiasi potenza intera di 10, hanno logaritmo a uguale mantissa.*

Prendiamo un numero N il cui logaritmo sia espresso da una certa caratteristica c e una certa mantissa m:

$$\log N = c.m$$

Si ha che

$$\log\left(N \cdot 10^k\right) = \log N + \log 10^k = \log N + k = c.m + k$$

ma siccome k è intero

$$c.m + k = (c + k)\,.m$$

Analogamente

$$\log \frac{N}{10^k} = \log N - \log 10^k = c.m - k = (c - k).m$$

Concludendo:

$$\boxed{\text{Per } \log\left(N \cdot 10^k\right) = c.m,\ m \text{ rimane costante per ogni } k \text{ intero}}$$

3.2 Metodi ed esempi

. . . .

3.2.1 Calcolo del logaritmo

Per calcolare il logaritmo di un numero N si procede come segue per i due casi:

La caratteristica per N > 1. Si trova la caratteristica c, che si ottiene dal numero di termini della parte intera -1; per esempio, cerchiamo il $\log 231.5$:

$$10^2 < 231.5 < 10^3 \quad \Rightarrow \quad 2 < \log 231.5 < 3 \quad \Rightarrow \quad \log 231.5 = 2.m$$

Si passa quindi a calcolare la mantissa come descritto più sotto;

La caratteristica per N < 1. Si trova la caratteristica c ponendo il segno $-$ sul numero che esprime la quantità degli 0 prima dei rimanenti numeri decimali; per esempio, cerchiamo il $\log 0.003$:

$$\log 0.003 = \log \frac{3}{10^3} = \log 3 - 3 = 0.m - 3 = \bar{3}.m$$

La mantissa. Per entrambi i casi si passa ora a calcolare la mantissa m cercando i primi 4 numeri sulle tabelle. Se vi sono altre cifre, si calcola la differenza fra la mantissa trovata e quella precedente; quindi si cerca il numero, secondo la differenza, sulle parti proporzionali (p.p.). Tale numero diviso per 10 viene sommato alla mantissa e si arrotonda, nel caso di una sesta cifra. Nel caso di una settima cifra, si divide per 100 e così via.

. . . .

Esempio: calcolare $x = \log 1084.5696$
La caratteristica è $c = 3$; calcoliamo la mantissa m:

$$\begin{array}{r} 03503. \\ 20.0 \\ 2.4 \\ 0.36 \\ 0.012 \\ \hline 03525.772 \end{array}$$

Per cui alla fine si arrotonda e si trova $x = 3.03526$

. . . .

Esempio: calcolare $x = \log 0.0345679$
La caratteristica è $c = -2$; calcoliamo la mantissa m:

$$\begin{array}{r} 53857. \\ 8.4 \\ 1.08 \\ \hline 53866.48 \end{array}$$

Per cui alla fine si arrotonda e si trova $x = \bar{2}.53866$

. . . .

3.2.2 Il cologaritmo

Il cologaritmo è l'opposto del logaritmo:

$$\boxed{-\log N = \mathrm{colog} N}$$

Si ha

$$-\log N = -(c.m) = -(c + 0.m) = -c - 0.m = -c - 1 + 1 - 0.m$$

Per esempio, calcoliamo il cologaritmo di un numero N per cui $\log N = \bar{2}.53321$:

$$\begin{aligned}
\text{colog}N &= -(\bar{2}.53321) = \\
&= -(-2 + 0.53321) = \\
&= 2 - 0.53321 = \\
&= 2 - 1 + 1 - 0.53321 = \\
&= 1 + 0.46679 \\
&= 1.46679
\end{aligned}$$

. . . .

3.2.3 L'antilogaritmo

Per risalire dal logaritmo al numero da cui esso è stato calcolato, si procede al calcolo dell'antilogaritmo.

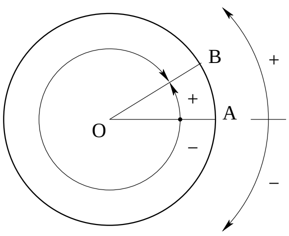
L'antilogaritmo di trova cercando la mantissa sulle tavole e determinando il numero a cui corrisponde. Si determina la virgola leggendo la mantissa. Se vi è una sesta cifra, si trova sulle p.p. e leggendo il numero intero a cui corrisponde. Se la mantissa non si trova sulle tavole, si legge quella precedente e trovando sulle p.p. la differenza tra la mantissa da trovare e quella trovata. Se sulle p.p. c'è un numero maggiore, si legge quello minore, quindi si riporta vicino al numero trovato dalla mantissa. Si procede a determinare la differenza fra la differenza fra le due mantisse (quella da trovare e quella trovata) e il numero decimale trovato sulle p.p.. Tale differenza si moltiplica per 10 e trovando il numero decimale sulle p.p. secondo il procedimento suddetto.

Per esempio, se $\log x = \bar{3}.66396$, abbiamo che $x = 0.004612\bar{7}$; se $\log x = 2.39468$ si ha $x = 248.12\bar{7}$.

Capitolo 4

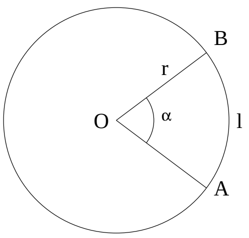
Trigonometria

4.1 Definizioni



Data una circonferenza di centro O e su di essa un punto di riferimento A, per convenzione sono stati stabiliti i versi di percorrenza degli archi: positivo quello antiorario, negativo quello orario.
Il punto B si chiama *punto termine degli archi*.

In una circonferenza ci sono infiniti archi di origine A e termine B. Infatti, partendo da A, si possono descrivere tante circonferenze, sia in verso positivo che negativo, fino a fermarsi in B. Analogamente gli angoli sono infiniti ed hanno verso corrispondente a quello dell'arco relativo.



Dalla figura qui affianco si vede che

$$l : 2\,\pi\,r = \alpha : 360$$

da cui si ricavano le relazioni

$$\boxed{l = \frac{\pi\,r\,\alpha}{180}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\alpha = \frac{180\,l}{\pi\,r}}$$

Definizione 5. *Si chiama* **angolo radiante** *l'angolo che insiste su di un arco di lunghezza pari al raggio.*

In pratica l'angolo radiante è l'angolo che sulla circonferenza individua un arco che, rettificato, è uguale al raggio. Quindi per un angolo radiante unitario si ha $l/r = 1$, e in generale l'angolo radiante è

$$\boxed{\rho = \frac{l}{r}}$$

Sostituendo i valori di l e α sopra riportati si ha:

$$\rho = \frac{\pi\,r\,\alpha}{180} \cdot \frac{1}{r}$$

cioè, semplificando

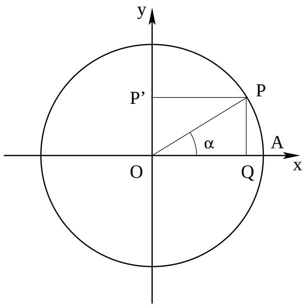
$$\boxed{\rho = \frac{\pi\,\alpha}{180}} \qquad \text{e inversamente} \qquad \boxed{\alpha = \frac{180\,\rho}{\pi}}$$

4.2 Funzioni goniometriche e loro variazioni

Definizione 6. *Dicesi* **circonferenza goniometrica** *la circonferenza in cui gli assi cartesiani sono posti su due diametri, è stato stabilito un verso di percorrenza e viene preso il raggio come unità di misura.*

. . . .

4.2.1 Il seno e il coseno



Il **seno** dell'angolo α è l'ordinata del punto P rispetto al raggio:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\overline{\mathrm{P'O}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}}$$

Il **coseno** dell'angolo α è l'ascissa del punto P rispetto al raggio:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}}$$

Quindi:

Definizione 7. *Il* **seno** *di un arco (o del corrispondente angolo al centro) è* l'ordinata *dell'estremo dell'arco rispetto al raggio.*

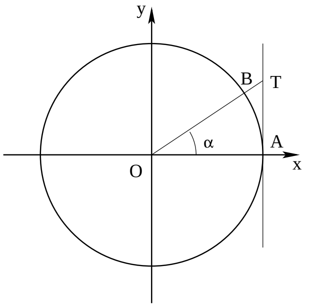
Definizione 8. *Il* **coseno** *di un arco (o del corrispondente angolo al centro) è* l'ascissa *dell'estremo dell'arco rispetto al raggio.*

Il seno e il coseno di un angolo sono funzioni dell'arco o dell'angolo stesso, per cui si dicono *funzioni goniometriche.*

Variazione di $\sin\alpha$	Variazione di $\cos\alpha$
$\sin 0 = \sin 0^{\circ} = 0$	$\cos 0 = \cos 0^{\circ} = 1$
$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^{\circ} = 1$	$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^{\circ} = 0$
$\sin\pi = \sin 180^{\circ} = 0$	$\cos\pi = \cos 180^{\circ} = -1$
$\sin\frac{3}{2}\pi = \sin 270^{\circ} = -1$	$\cos\frac{3}{2}\pi = \cos 270^{\circ} = 0$
$\sin 2\pi = \sin 360^{\circ} = 0$	$\cos 2\pi = \cos 360^{\circ} = 1$
$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$	$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

. . . .

4.2.2 La tangente

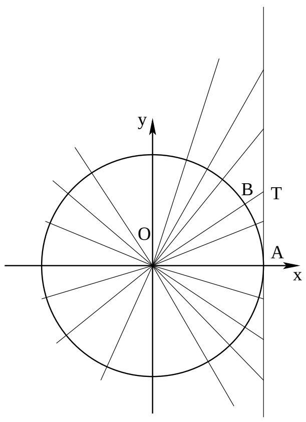


La tangente di un angolo α è l'ordinata del punto T rispetto al raggio:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\overline{\mathrm{AT}}}{\overline{\mathrm{OA}}}}$$

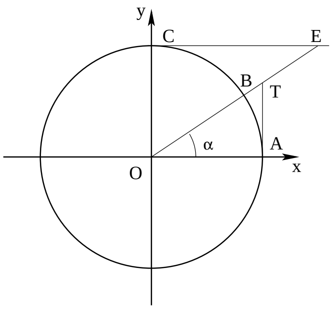
Quindi:

Definizione 9. *La* **tangente** *di un arco (o dell'angolo al centro corrispondente) è l'ordinata del punto di intersezione fra la tangente condotta al punto origine degli archi col prolungamento del raggio passante per l'estremo degli archi, rispetto al raggio.*



Variazione di $\tan\alpha$				
$\tan 0$	$=$	$\tan 0^{\mathrm{o}}$	$=$	0
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$	$=$	$\tan(90^{\mathrm{o}}-\varepsilon)$	$=$	$+\infty$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$	$=$	$\tan(90^{\mathrm{o}}+\varepsilon)$	$=$	$-\infty$
$\tan\pi$	$=$	$\tan 180^{\mathrm{o}}$	$=$	0
$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\varepsilon\right)$	$=$	$\tan(270^{\mathrm{o}}-\varepsilon)$	$=$	$+\infty$
$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\varepsilon\right)$	$=$	$\tan(270^{\mathrm{o}}+\varepsilon)$	$=$	$-\infty$
$\tan 2\pi$	$=$	$\tan 360^{\mathrm{o}}$	$=$	0
$-\infty \leq \tan\alpha \leq +\infty$				

4.2.3 La cotangente



La cotangente di un angolo α è l'ascissa del punto E rispetto al raggio:

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\overline{\mathrm{OC}}}}$$

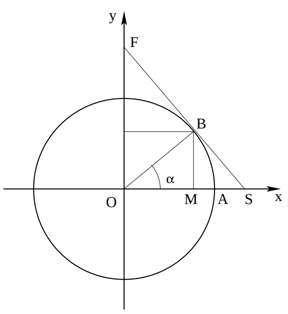
Quindi:

Definizione 10. *La* **cotangente** *di un arco è l'ascissa del punto di intersezione della tangente geometrica parallela all'asse x con il prolungamento del raggio passante per l'estremo dell'arco.*

Variazione di $\cot\alpha$				
$\cot(0+\varepsilon)$	$=$	$\cot(0^o+\varepsilon)$	$=$	$+\infty$
$\cot(0-\varepsilon)$	$=$	$\cot(0^o-\varepsilon)$	$=$	$-\infty$
$\cot\frac{\pi}{2}$	$=$	$\cot 90^o$	$=$	0
$\cot(\pi-\varepsilon)$	$=$	$\cot(180^o-\varepsilon)$	$=$	$-\infty$
$\cot(\pi+\varepsilon)$	$=$	$\cot(180^o+\varepsilon)$	$=$	$+\infty$
$\cot\frac{3}{2}\pi$	$=$	$\cot 270^o$	$=$	0
$\cot(2\pi-\varepsilon)$	$=$	$\cot(360^o-\varepsilon)$	$=$	$-\infty$
$\cot(2\pi+\varepsilon)$	$=$	$\cot(360^o+\varepsilon)$	$=$	$+\infty$
$-\infty\leq\cot\alpha\leq+\infty$				

. . . .

4.2.4 La secante e la cosecante



L'ascissa del punto S rispetto al raggio è la secante dell'angolo α:

$$\boxed{\sec\alpha=\frac{\overline{\mathrm{OS}}}{\overline{\mathrm{OB}}}}$$

Analogamente, l'ordinata del punto F rispetto al raggio è la cosecante dell'angolo α:

$$\boxed{\csc\alpha=\frac{\overline{\mathrm{OF}}}{\overline{\mathrm{OB}}}}$$

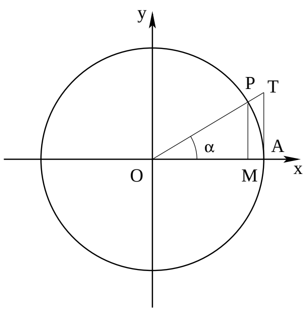
Quindi:

Definizione 11. *La* **secante** *di un angolo α è l'ascissa del punto di intersezione fra la tangente portata al punto termine degli archi e l'asse delle ascisse, rispetto al raggio.*

Definizione 12. *La* **cosecante** *di un angolo α è l'ordinata del punto di intersezione fra la tangente portata al punto termine degli archi e l'asse delle ordinate, rispetto al raggio.*

Variazione di $\sec\alpha$	Variazione di $\csc\alpha$
$\sec 0 = \sec 0^o = 1$	$\csc(0-\varepsilon) = \csc(0^o-\varepsilon) = -\infty$
$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) = \sec 90^o-\varepsilon = +\infty$	$\csc(0+\varepsilon) = \csc(0^o+\varepsilon) = +\infty$
$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) = \sec 90^o+\varepsilon = -\infty$	$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^o = 1$
$\sec\pi = \sec 180^o = -1$	$\csc(\pi-\varepsilon) = \csc(180^o-\varepsilon) = +\infty$
$\sec\left(\frac{3}{2}\pi-\varepsilon\right) = \sec 270^o-\varepsilon = -\infty$	$\csc(\pi+\varepsilon) = \csc(180^o+\varepsilon) = -\infty$
$\sec\left(\frac{3}{2}\pi+\varepsilon\right) = \sec 270^o+\varepsilon = +\infty$	$\csc\frac{3}{2}\pi = \csc 270^o = -1$
$\sec 2\pi = \sec 360^o = 1$	$\csc(2\pi-\varepsilon) = \csc(360^o-\varepsilon) = -\infty$
	$\csc(2\pi+\varepsilon) = \csc(360^o+\varepsilon) = +\infty$
$-\infty \leq \sec\alpha \leq -1$ $1 \leq \sec\alpha \leq +\infty$	$-\infty \leq \csc\alpha \leq -1$ $1 \leq \csc\alpha \leq +\infty$

4.3 Relazioni fondamentali fra le sei funzioni goniometriche



Analizzando il triangolo OMP, per il teorema di Pitagora:

$$\overline{\mathrm{OM}}^2 + \overline{\mathrm{PM}}^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2$$

dividendo primo e secondo membro per $\overline{\mathrm{OP}}^2$:

$$\frac{\overline{\mathrm{OM}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2} + \frac{\overline{\mathrm{PM}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2} = \frac{\overline{\mathrm{OP}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2}$$

ossia

$$\frac{\overline{\mathrm{OM}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2} + \frac{\overline{\mathrm{PM}}^2}{\overline{\mathrm{OP}}^2} = 1$$

quindi

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

....

Analizzando i triangoli rettangoli OMP e OAT, essi sono simili per avere l'angolo $\widehat{\mathrm{O}}$ in comune; per questo possiamo scrivere:

$$\overline{\mathrm{AT}} : \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{PM}} : \overline{\mathrm{OM}}$$

dividiamo per $\overline{\mathrm{OP}}$

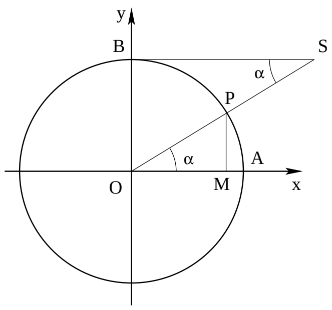
$$\frac{\overline{\mathrm{AT}}}{\overline{\mathrm{OP}}} : \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \frac{\overline{\mathrm{PM}}}{\overline{\mathrm{OP}}} : \frac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{OP}}}$$

quindi

$$\tan\alpha : 1 = \sin\alpha : \cos\alpha$$

da cui

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$



I triangoli BSO e OPM sono simili perché retti e per avere l'angolo $\widehat{\mathrm{MOP}}$ uguale all'angolo $\widehat{\mathrm{BSO}}$ perché alterni interni delle rette parallele PM e OB tagliate dalla trasversale OS.
Quindi possiamo scrivere

$$\overline{\mathrm{BS}} : \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OM}} : \overline{\mathrm{MP}}$$

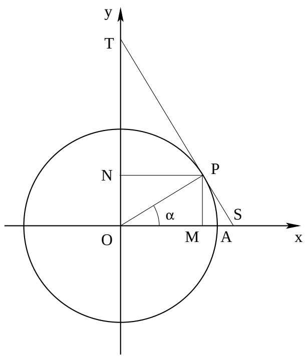
dividendo per $\overline{\mathrm{OB}}$

$$\frac{\overline{\mathrm{BS}}}{\overline{\mathrm{OB}}} : \frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{OB}}} = \frac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{OB}}} : \frac{\overline{\mathrm{MP}}}{\overline{\mathrm{OB}}}$$

da cui

$$\cot\alpha : 1 = \cos\alpha : \sin\alpha$$

$$\boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \qquad \text{ovvero} \qquad \boxed{\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}}$$



Analizzando il triangolo OPS, per il primo teorema di Euclide, possiamo scrivere che

$$\overline{\mathrm{OS}} : \overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{OM}}$$

dividendo per $\overline{\mathrm{OP}}$

$$\frac{\overline{\mathrm{OS}}}{\overline{\mathrm{OP}}} : \frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OP}}} : \frac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{OP}}}$$

da cui

$$\sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha$$

$$\boxed{\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}}$$

Infine, analizzando il triangolo OPT, per il primo teorema di Euclide, possiamo scrivere che

$$\overline{\mathrm{OT}} : \overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{ON}}$$

dividendo per $\overline{\mathrm{OP}}$

$$\frac{\overline{\mathrm{OT}}}{\overline{\mathrm{OP}}} : \frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \frac{\overline{\mathrm{OP}}}{\overline{\mathrm{OP}}} : \frac{\overline{\mathrm{ON}}}{\overline{\mathrm{OP}}}$$

da cui

$$\csc\alpha : 1 = 1 : \sin\alpha$$

quindi

$$\boxed{\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}}$$

4.4 Valori delle funzioni goniometriche mediante una sola di esse

4.4.1 Noto $\sin\alpha$

Da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ si ha

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos\alpha &= \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \\
\tan\alpha &= \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \\
\cot\alpha &= \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \\
\sec\alpha &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \\
\csc\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha}
\end{aligned}}$$

4.4.2 Noto $\cos\alpha$

Da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ si ha

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin\alpha &= \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\
\tan\alpha &= \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \\
\cot\alpha &= \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \\
\sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} \\
\csc\alpha &= \pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}
\end{aligned}}$$

4.4.3 Noto $\tan\alpha$

Da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dividendo per $\cos^2\alpha$

$$\tan\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

da cui

$$\boxed{\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$$

Dall'uguaglianza

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

si ottiene $\sin\alpha = \tan\alpha\,\cos\alpha$, ossia

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \sin\alpha &=& \pm\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \\[2ex] \cot\alpha &=& \dfrac{1}{\tan\alpha} \\[2ex] \sec\alpha &=& \pm\sqrt{1+\tan^2\alpha} \\[2ex] \csc\alpha &=& \pm\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha} \end{array}}$$

. . . .

4.4.4 Noto $\cot\alpha$

Da $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ dividendo per $\sin^2\alpha$ si ha

$$1 + \cot\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

da cui

$$\boxed{\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}}$$

dall'uguaglianza

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$

si ottiene $\cos\alpha = \cot\alpha\,\sin\alpha$, ossia

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos\alpha &=& \pm\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} \\[2ex] \tan\alpha &=& \dfrac{1}{\cot\alpha} \\[2ex] \sec\alpha &=& \pm\dfrac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha} \\[2ex] \csc\alpha &=& \pm\sqrt{1+\cot^2\alpha} \end{array}}$$

4.5 Archi associati

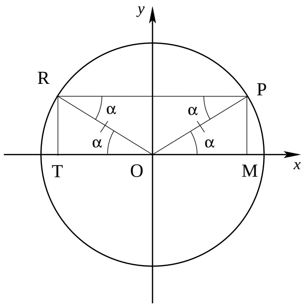
Definizione 13. *Gli archi associati sono archi le cui funzioni goniometriche hanno uguali valori assoluti.*

Essi sono:

$$\begin{cases} 180° - \alpha \\ 180° + \alpha \\ -\alpha \text{ ovvero } 360° - \alpha \end{cases}$$

. . . .

4.5.1 1° caso: $180° - \alpha$



Dato un angolo α, dal punto termine degli archi portiamo la parallela all'asse x delle ascisse. Il punto di incontro fra la parallela e la circonferenza nel 2° quadrante sarà il punto termine degli archi di $180° - \alpha$, perché

$$\frac{\overline{\mathrm{PM}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \sin\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{OP}}} = \cos\alpha\,.$$

Gli angoli $\widehat{\mathrm{POM}}$ e $\widehat{\mathrm{OPR}}$ sono uguali perché alterni interni fra le parallele TM e RP tagliate dalla trasversale OP.

Il triangolo ORP è isoscele in quanto i lati $\overline{\mathrm{OR}}$ e $\overline{\mathrm{OP}}$ sono raggi della stessa circonferenza, quindi gli angoli alla base in $\widehat{P}$ e in $\widehat{\mathrm{R}}$ sono uguali.

Inoltre gli angoli $\widehat{\mathrm{TOR}}$ e $\widehat{\mathrm{ORP}}$ sono uguali perché alterni interni fra le parallele TM e RP tagliate dalla trasversale OR.

Si conclude che i triangoli ORT e OPM sono uguali per essere retti ed avere

$$\overline{\mathrm{OR}} = \overline{\mathrm{OP}} \quad \text{e} \quad \widehat{\mathrm{TOR}} = \widehat{\mathrm{MOP}}\,.$$

Per cui segue che

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathrm{RT}}}{\overline{\mathrm{OR}}} &= \sin(180° - \alpha) \\ \frac{\overline{\mathrm{OT}}}{\overline{\mathrm{OR}}} &= \cos(180° - \alpha) \end{aligned}$$

il che significa che

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(180° - \alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(180° - \alpha) &= -\cos\alpha \end{aligned}}$$

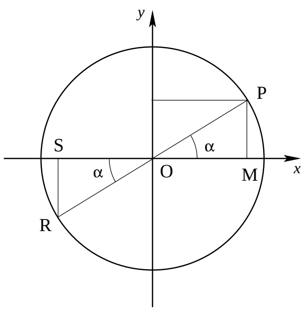
e infine

$$\begin{aligned} \tan(180° - \alpha) &= \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha \\ \cot(180° - \alpha) &= \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = -\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tan(180° - \alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(180° - \alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}}$$

....

4.5.2 2° caso: $180° + \alpha$



I triangoli OPM e ORS sono uguali per avere:

1. $\overline{\mathrm{OR}} = \overline{\mathrm{OP}}$ perché raggi della stessa circonferenza,
2. $\widehat{\mathrm{POM}} = \widehat{\mathrm{ROS}}$ per essere angoli opposti al vertice.

Dato che sono triangoli rettangoli uguali per i suddetti motivi, in particolare hanno:

$$\overline{\mathrm{RS}} = \overline{\mathrm{PM}} \quad \text{e} \quad \overline{\mathrm{OS}} = \overline{\mathrm{OM}}\,.$$

Da quanto detto segue che

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(180° + \alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(180° + \alpha) &= -\cos\alpha \end{aligned}}$$

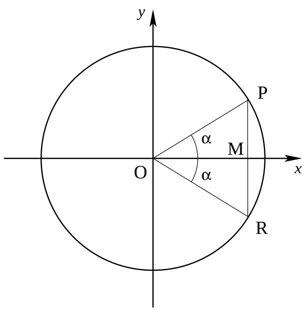
e di conseguenza

$$\begin{aligned} \tan(180° + \alpha) &= \frac{\sin(180° + \alpha)}{\cos(180° + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha \\ \cot(180° + \alpha) &= \frac{\cos(180° + \alpha)}{\sin(180° + \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tan(180° + \alpha) &= \tan\alpha \\ \cot(180° + \alpha) &= \cot\alpha \end{aligned}}$$

. . . .

4.5.3 3° caso: $-\alpha$ o $360° - \alpha$



Il triangolo OPR è isoscele perché ha i lati $\overline{\text{OP}}$ e $\overline{\text{OR}}$ uguali in quanto raggi della stessa circonferenza;
$\overline{\text{OM}} \perp \overline{\text{PR}}$ perché $\overline{\text{PR}}$ è la somma dei seni degli angoli $\widehat{\text{POM}}$ e $\widehat{\text{MOR}}$, seni che sono sempre perpendicolari all'asse delle ascisse. Quindi $\overline{\text{OM}}$ rappresenta l'altezza del triangolo OPR. Per questo avremo:

$$\overline{\text{PM}} = \overline{\text{MR}} \quad \text{e} \quad \widehat{\text{POM}} = \widehat{\text{MOR}}\,.$$

Di conseguenza avremo

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \end{aligned}}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} \tan(-\alpha) &= \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha \end{aligned}$$

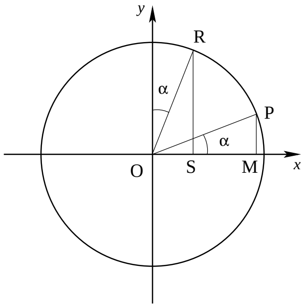
$$\boxed{\begin{aligned} \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha \end{aligned}}$$

4.6 Archi complementari

Definizione 14. *Due archi si dicono* **complementari** *quando il seno e la tangente dell'uno sono rispettivamente uguali al coseno e alla cotangente dell'altro in valore assoluto.*

. . . .

4.6.1 1° caso: $90° - \alpha$



Abbiamo un angolo α conosciuto. Con una rotazione attorno a O lo portiamo in posizione tale che lo stesso angolo nello stesso quadrante si trovi con un lato coincidente con l'asse delle ordinate. Dal confronto fra i due triangolo ORS e OPM si vede che $\overline{\mathrm{SR}} = \overline{\mathrm{OM}}$ e quindi

$$\boxed{\sin(90° - \alpha) \quad = \quad \cos\alpha}$$

E ancora $\overline{\mathrm{OS}} = \overline{\mathrm{PM}}$, cioè

$$\boxed{\cos(90° - \alpha) \quad = \quad \sin\alpha}$$

Dato inoltre che

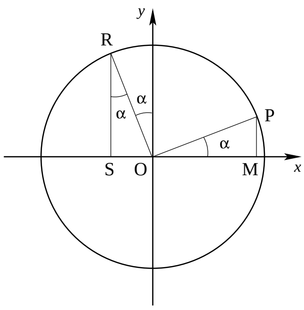
$$\begin{aligned} \tan(90° - \alpha) &= \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \\ \cot(90° - \alpha) &= \frac{\cos(90° - \alpha)}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{aligned}$$

si ottiene

$$\boxed{\begin{aligned} \tan(90° - \alpha) &= \cot\alpha \\ \cot(90° - \alpha) &= \tan\alpha \end{aligned}}$$

. . . .

4.6.2 2° caso: $90° + \alpha$



Dato un angolo α noto, mandando la prependicolare al segmento $\overline{\mathrm{OP}}$, riportiamo tale angolo nel quadrante successivo, facendogli compiere un angolo di 90°.
Avremo che $\widehat{\mathrm{yOR}} = \widehat{\mathrm{POM}}$ perché complementari di uno stesso angolo, e $\widehat{\mathrm{yOR}} = \widehat{\mathrm{ORS}}$ perché alterni interni fra le parallele y ed RS tagliate dalla trasversale OR. Per cui, per la proprietà transitiva, abbiamo $\widehat{\mathrm{ORS}} = \widehat{\mathrm{POM}}$.
Inoltre, dato che OR = OP perché raggi della stessa circonferenza, ed essendo ORS ed OPM triangoli rettangoli, è anche

$$\overline{\mathrm{OS}} = \overline{\mathrm{PM}} \quad \mathrm{e} \quad \overline{\mathrm{RS}} = \overline{\mathrm{OM}}$$

che rispettivamente danno

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(90° + \alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90° + \alpha) &= -\sin\alpha \end{aligned}}$$

Infine

$$\begin{aligned} \tan(90° + \alpha) &= \frac{\sin(90° + \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} \\ \cot(90° - \alpha) &= \frac{\cos(90° + \alpha)}{\sin(90° + \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{aligned}$$

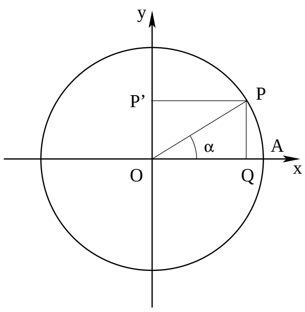
ovvero

$$\boxed{\begin{aligned} \tan(90° + \alpha) &= -\cot\alpha \\ \cot(90° + \alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}}$$

4.7 Archi particolari

....

4.7.1 1° caso: 18°



La corda $\overline{\mathrm{AB}}$ è il lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza. Tale lato corrisponde ad un angolo al centro di 36° ed è la sezione aurea del raggio, ossia:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)\,, \\ \overline{\mathrm{AM}} &= \frac{r}{4}(\sqrt{5}-1)\,.\end{aligned}$$

Da quest'ultima relazione si conclude che

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

Abbiamo inoltre:

$$\begin{aligned}\cos 18^\circ &= \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}} = \\ &= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 18^\circ &= \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \\ &= \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}{25-5}} = \sqrt{\frac{20-8\sqrt{5}}{20}} = \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}\end{aligned}$$

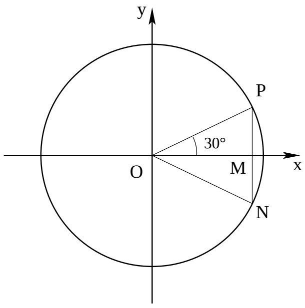
$$\begin{aligned}\cot 18^\circ &= \frac{1}{\tan 18^\circ} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}{1-\frac{4}{5}\sqrt{5}}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin 18^\circ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \\ \cos 18^\circ &= \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \\ \tan 18^\circ &= \sqrt{1-\frac{2}{5}\sqrt{5}} \\ \cot 18^\circ &= \sqrt{5+2\sqrt{5}}\end{aligned}}$$

. . . .

4.7.2 2° caso: 30°



Considerando l'angolo $\widehat{\mathrm{PON}}$, esso è equilatero in quanto l'angolo al centro è di 60° e i lati adiacenti all'angolo sono uguali perché raggi della stessa circonferenza.
Quindi

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{PN}} &= \overline{\mathrm{OP}} \\ \overline{\mathrm{PM}} &= \frac{1}{2}\overline{\mathrm{PN}} \end{aligned}$$

da cui $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ e, facendo i calcoli, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Riassumendo:

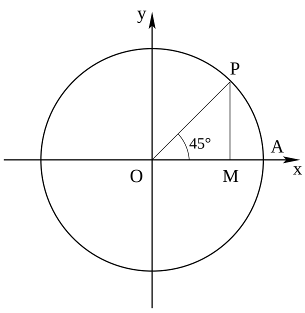
$$\boxed{\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot 30^\circ &= \sqrt{3} \end{aligned}}$$

. . . .

4.7.3 3° caso: 45°

Per un angolo di 45° si calcola subito

$$\sin 45^\circ = \sin(90^\circ - 45^\circ) = \cos 45^\circ \,.$$



Dalla relazione $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$, si può scrivere

$$\sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1 \,,$$

cioè $2\sin^2 45^\circ = 1$, ovvero

$$\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e quindi

$$\tan 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \,.$$

Schematizzando scriviamo:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 45° &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45° &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 45° &= 1 \\ \cot 45° &= 1 \end{aligned}}$$

4.7.4 4° caso: 60°

Dato che l'angolo di 60° è complementare a quello di 30°

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e viceversa

$$\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

e così via:

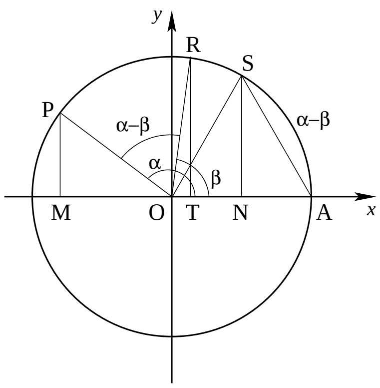
$$\begin{aligned} \tan 60° &= \cot 30° = \sqrt{3} \\ \cot 60° &= \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

E di nuovo completiamo lo schema:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 60° &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60° &= \frac{1}{2} \\ \tan 60° &= \sqrt{3} \\ \cot 60° &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}}$$

4.8 Formule di addizione e sottrazione

4.8.1 Coseno della differenza di due archi



Sulla solita circonferenza goniometrica abbiamo un angolo $\widehat{\text{POR}} = \alpha - \beta$.
Con un movimento di rotazione attorno al centro O, riportiamo l'angolo suddetto in posizione tale che $\overline{\text{OR}}$ coincida con $\overline{\text{OA}}$. Tenendo conto che $\widehat{\text{AOP}}$ è l'angolo α e $\widehat{\text{AOR}}$ l'angolo β, le coordinate dei punti sono:

$$\begin{aligned} P &\equiv (\cos\alpha; \sin\alpha) \\ R &\equiv (\cos\beta; \sin\beta) \\ S &\equiv [\cos(\alpha-\beta); \sin(\alpha-\beta)] \\ A &\equiv (1; 0) \end{aligned}$$

Siccome $\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{AS}}$ perché corde di archi uguali, si può scrivere la distanza fra due punti secondo la geometria analitica:

$$\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2} = \sqrt{[\cos(\alpha - \beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha - \beta)}$$

elevando al quadrato entrambi i membri e sviluppando i quadrati

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\,\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\,\sin\beta + \sin^2\beta = \\ = \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$2\cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\,\cos\beta + 2\sin\alpha\,\sin\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta}$$

. . . .

4.8.2 Coseno della somma di due archi

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \\ &= \cos\alpha\,\cos(-\beta) + \sin\alpha\,\sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta}$$

. . . .

4.8.3 Seno della differenza di due archi

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha-\beta) = \cos[90^\circ - (\alpha-\beta)] = \cos(90^\circ - \alpha + \beta) = \\ &= \cos[(90^\circ - \alpha) + \beta] = \cos(90^\circ - \alpha)\,\cos\beta - \sin(90^\circ - \alpha)\,\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta}$$

. . . .

4.8.4 Seno della somma di due archi

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \\ &= \sin\alpha\,\cos(-\beta) - \cos\alpha\,\sin(-\beta) = \\ &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta\end{aligned}$$

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta}$$

. . . .

4.8.5 Tangente della somma/differenza di due archi

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta}$$

dividendo per $\cos\alpha\,\cos\beta$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta}\,.$$

Sostituendo il segno negativo a quello positivo in $\tan(\alpha+\beta)$ cambieranno i segni ma non le funzioni. Quindi

$$\boxed{\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\,\tan\beta}}$$

. . . .

4.8.6 Cotangente della somma/differenza di due archi

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos\alpha\,\cos\beta \mp \sin\alpha\,\sin\beta}{\sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta}$$

dividendo per $\sin\alpha\,\sin\beta$

$$\boxed{\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\,\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}}$$

4.9 Formule di duplicazione

4.9.1 Seno dell'angolo doppio

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\,\cos\alpha + \cos\alpha\,\sin\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha}$$

4.9.2 Coseno dell'angolo doppio

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\,\cos\alpha - \sin\alpha\,\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Ma

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

o anche

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Riassumendo

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2\alpha \end{aligned}}$$

4.9.3 Tangente dell'angolo doppio

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{-\tan\alpha\,\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$$

4.9.4 Cotangente dell'angolo doppio

La cotangente è il reciproco della tangente, per cui

$$\boxed{\cot 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{2\tan\alpha}}$$

4.10 Formule parametriche

Definizione 15. *Le formule parametriche danno il valore del seno e coseno in funzione della tangente dell'angolo metà.*

. . . .

4.10.1 1° caso: $\sin\alpha$

Dalle formule di duplicazione sappiamo che

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha\,,$$

quindi

$$\begin{aligned}
\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}\\
\sin\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}\\
\sin\alpha &= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}}{1}\\
\sin\alpha &= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\,\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ avremo

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}$$

. . . .

4.10.2 2° caso: $\cos\alpha$

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\
\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\\
\cos\alpha &= \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\\
\cos\alpha &= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{1}\\
\cos\alpha &= \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}\,.
\end{aligned}$$

Dividendo numeratore e denominatore per $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$ avremo

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}$$

Sia nella formula del seno che nella formula del coseno si usa porre $t = \tan\dfrac{\alpha}{2}$, per cui si scrive

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{2\,t}{1+t^2}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

4.11 Formule di bisezione

Riprendiamo le formule

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \cos \alpha \end{aligned}$$

Sommando membro a membro

$$\begin{aligned} 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 + \cos \alpha \\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 + \cos \alpha}{2} \end{aligned}$$

e infine

$$\boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

Sempre dalle due equazioni iniziali, sottraendo membro a membro

$$\begin{aligned} 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} &= 1 - \cos \alpha \\ \sin^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore di quest'ultima formula per $(1 - \cos \alpha)$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \pm\sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}}$$

da cui

$$\boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \pm\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore sempre della prima formula della tangente per $(1 + \cos \alpha)$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}} = \pm\sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}}$$

da cui

$$\boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

. . . .

4.11.1 Valori di particolari tangenti

$$\tan 15° = \tan \frac{30°}{2} = \frac{1-\cos 30°}{\sin 30°} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\tan 75° = \tan \frac{150°}{2} = \frac{1-\cos 150°}{\sin 150°} = \frac{1-\cos(180°-30°)}{\sin(180°-30°)} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\tan 22°30' = \tan \frac{45°}{2} = \frac{1-\cos 45°}{\sin 45°} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}-1$$

$$\tan 67°30' = \tan \frac{135°}{2} = \frac{1-\cos 135°}{\sin 135°} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}+1$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \tan 15° & = & 2-\sqrt{3} \\ \tan 75° & = & 2+\sqrt{3} \\ \tan 22°30' & = & \sqrt{2}-1 \\ \tan 67°30' & = & \sqrt{2}+1 \end{array}}$$

4.12 Formule di prostaferesi

Riprendiamo le formule di somma e sottrazione degli angoli

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta \end{aligned}$$

Sommando e sottraendo membro a membro si ottiene rispettivamente

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\,\cos\beta \quad (4.1)$$
$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,\sin\beta \quad (4.2)$$

In maniera analoga, dalle formule

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta \end{aligned}$$

sommando e sottraendo membro a membro si ottiene rispettivamente

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\,\cos\beta \quad (4.3)$$
$$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\,\sin\beta \quad (4.4)$$

Poniamo ora

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= p \\ \alpha-\beta &= q \end{aligned}$$

Sommano e sottraendo membro a membro

$$\begin{aligned} 2\alpha &= p+q \\ 2\beta &= p-q \end{aligned}$$

ovvero

$$\alpha = \frac{p+q}{2} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{p-q}{2}$$

per cui, riprendendo le formule 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2\,\sin\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2\,\cos\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2\,\cos\frac{p+q}{2}\,\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2\,\sin\frac{p+q}{2}\,\sin\frac{p-q}{2} \end{aligned}}$$

4.13 Equazioni goniometriche

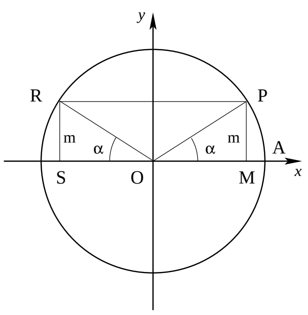
. . . .

4.13.1 Equazioni elementari

Le equazioni goniometriche elementari sono le equazioni della forma

$$\begin{cases} \sin x &= m \\ \cos x &= m \\ \tan x &= m \end{cases}$$

1° caso: $\sin x = m$



Ovviamente $-1 \leq m \leq 1$. Dalla figura a lato si vede che:

- il 1° angolo di m è α,
- il 2° angolo di m è $180° - \alpha$,

da cui si ha rispettivamente

- 1^a soluzione: $x = \alpha + 2k\pi$, dove 2π è il giro completo e $k = 1, 2, 3, \ldots$ un numero intero;
- 2^a soluzione: $x = \pi - \alpha + 2k\pi = (2k+1)\pi - \alpha$.

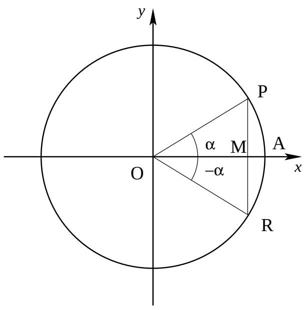
Per la prima soluzione, ponendo $h = 2k$, abbiamo che h è un numero pari, e perciò in caso di h pari l'angolo α viene aggiunto.

Per la seconda soluzione, ponendo $h = 2k+1$, h rappresenta un numero dispari (aggiungendo 1 a un qualsiasi numero pari $2k$ si ottiene un numero dispari), e quindi si conclude che nel caso di h dispari l'angolo α va sottratto.

Tutto questo discorso equivale a scrivere

$$\boxed{x = h\pi + (-1)^h\alpha, \quad h = 1, 2, 3, \ldots}$$

2° caso: $\cos x = m$



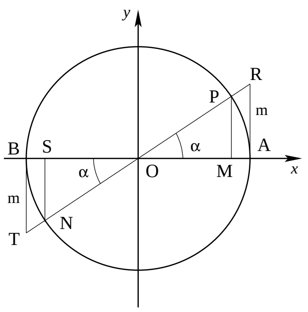
Anche qui ovviamente $-1 \leq m \leq 1$. Dalla figura a lato si vede che:

- il 1° angolo di m è α, e quindi $x = \alpha + 2k\pi$;
- il 2° angolo di m è $-\alpha$, e perciò $x = -\alpha + 2k\pi$;

Complessivamente si ha

$$\boxed{x = 2k\pi \pm \alpha, \quad k = 1, 2, 3, \ldots}$$

3° caso: $\tan x = m$



La tangente non è limitata: $-\infty \leq m \leq \infty$. Dalla figura a lato si vede che:

- il 1° angolo di m è α, e quindi $x = \alpha + 2k\pi$;
- il 2° angolo di m è $\pi + \alpha$, e perciò $x = \pi + \alpha + 2k\pi = (2k+1)\pi + \alpha$;

Complessivamente si ha

$$\boxed{x = h\pi + \alpha\,, \quad h = 1, 2, 3, \ldots}$$

. . . .

4.13.2 Equazioni lineari

Le equazioni lineari si distinguono in:

- lineari omogenee,
- lineari non omogenee.

Le equazioni lineari omogenee sono del tipo

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

che dividendo per $\cos x$ assumono la forma

$$\boxed{a \tan x + b = 0}$$

Le equazioni lineari non omogenee assumono la forma

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

cioè in più rispetto alle precedenti compare il termine noto c.

Con l'ausilio delle formule parametriche possiamo scrivere

$$\boxed{a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c}$$

. . . .

4.13.3 Equazioni quadratiche

Anche le equazioni quadratiche si distinguono in:

- quadratiche omogenee,
- quadratiche non omogenee.

Le equazioni quadratiche omogenee sono del tipo

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0\,.$$

Dividendo primo e secondo membro per $\cos^2 x$ si ottiene

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nell'incognita $\tan x$.

Le equazioni quadratiche non omogenee sono del tipo

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\,.$$

Dato che $d = d\cdot 1 = d\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x)$, la suddetta equazione si può riscrivere come

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\sin^2 x + d\cos^2 x$$

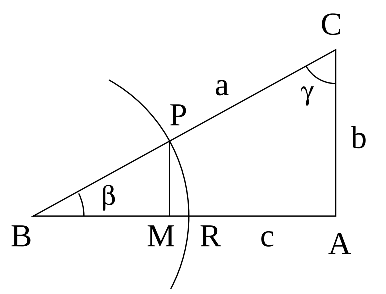
da cui

$$(a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0$$

e diventa un'equazione omogenea.

4.14 Teorema fondamentale dei triangoli rettangoli

Teorema 11. *La misura di un cateto è uguale alla misura dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto.*



Abbiamo un triangolo rettangolo dato e le misure dei suoi lati:

$$\overline{\mathrm{AB}} = c \quad \overline{\mathrm{BC}} = a \quad \overline{\mathrm{AC}} = b$$

Poniamo il vertice B come centro di una circonferenza. Il punto R di incontro fra la circonferenza e il cateto c, lo consideriamo come punto di origine degli archi, mentre il punto P di incontro tra la circonferenza e l'ipotenusa, lo consideriamo punto termine degli archi.
Posto $\overline{\mathrm{BR}} = 1$ e tracciando la perpendicolare da P a BR in M, il segmento $\overline{\mathrm{PM}}$ rispetto al raggio è il seno di β, angolo in B, e $\overline{\mathrm{BM}}$ rispetto al raggio è il coseno di β.

Ponendo la similitudine fra i triangoli BPM e ABC, avremo che

$$\overline{\mathrm{AC}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{PM}} : \overline{\mathrm{BM}}$$
$$b : a = \overline{\mathrm{PM}} : 1$$

Dividendo per il raggio della circonferenza

$$b : a = \sin\beta : 1$$

$$\boxed{b = a\,\sin\beta}$$

Teorema 12. *La misura di un cateto è uguale alla misura dell'ipotenusa moltiplicata per il coseno dell'angolo adiacente.*

Sempre dalla relazione dei triangoli BPM e ABC

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} &= \overline{\mathrm{BM}} : \overline{\mathrm{BP}} \\ c : a &= \overline{\mathrm{BM}} : 1\end{aligned}$$

dividendo per il raggio BR (unitario):

$$c : a = \cos\beta : 1$$

$$\boxed{c = a\ \cos\beta}$$

. . . .

Teorema 13. *La misura di un cateto è uguale alla misura dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto.*

Scriviamo le formule appena trovate poco sopra e facciamo il rapporto membro a membro:

$$\begin{aligned}b &= a\ \sin\beta \\ c &= a\ \cos\beta\end{aligned}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{a\ \sin\beta}{a\ \cos\beta} = \tan\beta$$

Moltiplicando tutto per c:

$$\boxed{b = c\ \tan\beta}$$

. . . .

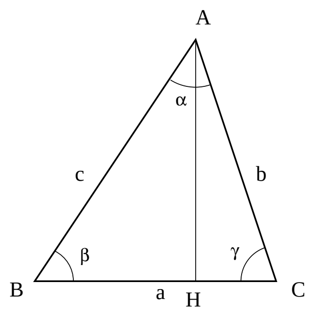
Teorema 14. *La misura di un cateto è uguale alla misura dell'altro cateto moltiplicata per la cotangente dell'angolo adiacente.*

Ora $\beta + \gamma = 90°$ e $\beta = 90° - \gamma$; per cui $b = c\ \tan(90° - \gamma)$:

$$\boxed{b = c\ \cot\gamma}$$

4.15 Teorema dei seni

Teorema 15. *Il rapporto fra un lato di un triangolo e il seno dell'angolo opposto è sempre costante e uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo stesso.*



Dalla figura affianco si vede che

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AH}} &= c\ \sin\beta \\ \overline{\mathrm{AH}} &= b\ \sin\gamma\end{aligned}$$

per cui

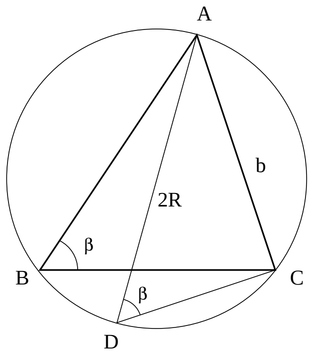
$$c\ \sin\beta = b\ \sin\gamma$$

Dividendo per $\sin\beta\sin\gamma$ si ottiene

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Analogo discorso si può fare per gli altri lati, per cui possiamo concludere che

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \tag{4.5}$$



Ora, si vede che $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ perché angoli alla circonferenza insistenti sullo stesso arco; per cui

$$b = 2\,R\,\sin\beta$$

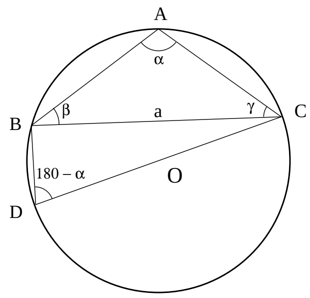
Dividendo per $\sin\beta$

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2\,R$$

Confrontando quest'ultima con le relazioni 4.5, possiamo scrivere

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,R}$$

Bisogna ora dimostrare che la relazione sia valida anche per i triangoli ottusangoli.



Il quadrilatero ABDC è inscritto in mezza circonferenza, per cui gli angoli opposti sono supplementari. Perciò avremo che il triangolo BCD è rettangolo:

$$\overline{\mathrm{BC}} = a \qquad \widehat{BDC} = 180° - \alpha$$

$$a = 2\,R\,\sin(180° - \alpha)$$

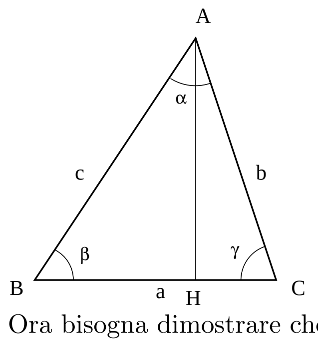
ma $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, quindi

$$a = 2\,R\,\sin\alpha$$

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = 2\,R}$$

4.16 Teorema dei coseni

Teorema 16. *La misura di un lato di un triangolo è uguale alla somma delle misure degli altri lati per i coseni degli angoli che essi formano con il lato.*

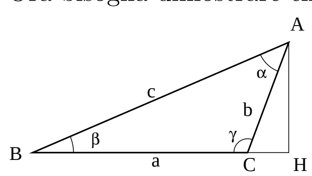


$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BH}} &= c\,\cos\beta\\ \overline{\mathrm{HC}} &= b\,\cos\gamma\\ \overline{\mathrm{BH}} + \overline{\mathrm{HC}} &= c\,\cos\beta + b\,\cos\gamma\end{aligned}$$

Essendo $\overline{\mathrm{BH}} + \overline{\mathrm{HC}} = a$, si ottiene

$$\boxed{a = c\,\cos\beta + b\,\cos\gamma}$$

Ora bisogna dimostrare che tale relazione sia valida anche per i triangoli ottusangoli.



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BH}} &= c\,\cos\beta\\ \overline{\mathrm{HC}} &= b\,\cos(180° - \gamma)\\ \overline{\mathrm{BH}} - \overline{\mathrm{HC}} &= c\,\cos\beta - b\,\cos(180° - \gamma)\end{aligned}$$

Ma $\overline{\mathrm{BH}} - \overline{\mathrm{HC}} = a$ e $\cos(180° - \gamma) = -\cos\gamma$. Per cui abbiamo infine

$$\boxed{\begin{array}{l} a = c\,\cos\beta + b\,\cos\gamma \\[2ex] b = a\,\cos\gamma + c\,\cos\alpha \\[2ex] c = a\,\cos\beta + b\,\cos\alpha \end{array}}$$

4.17 Teorema di Carnot

Teorema 17. *Il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri lati meno il loro doppio prodotto moltiplicato per il coseno dell'angolo compreso.*

Prendiamo le relazioni del teorema dei coseni e operiamo con le seguenti moltiplicazioni:

$$\begin{array}{lcl} (a = b\,\cos\gamma + c\,\cos\beta) & \cdot & a \\ (b = a\,\cos\gamma + c\,\cos\alpha) & \cdot & (-b) \\ (c = a\,\cos\beta + b\,\cos\alpha) & \cdot & (-c) \end{array}$$

Avremo:

$$\begin{array}{rcl} a^2 & = & a\,b\,\cos\gamma + a\,c\,\cos\beta \\ -b^2 & = & a\,b\,\cos\gamma + b\,c\,\cos\alpha \\ -c^2 & = & a\,c\,\cos\beta + b\,c\,\cos\alpha \end{array}$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2\,b\,c\,\cos\alpha$$

ovvero

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha}$$

4.18 Teorema di Nepero

Teorema 18. *La differenza di due lati di un triangolo sta alla loro somma come la tangente della semidifferenza degli angoli opposti sta alla tangente della semisomma degli angoli stessi.*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2\,R \qquad \frac{b}{\sin\beta} = 2\,R$$

$$a = 2\,R\,\sin\alpha \qquad b = 2\,R\,\sin\beta$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2\,R\,\sin\alpha - 2\,R\,\sin\beta}{2\,R\,\sin\alpha + 2\,R\,\sin\beta} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

Per le formule di prostaferesi

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} &= \frac{2\,\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\,\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\,\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} \cdot \frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = \\ &= \tan\frac{\alpha-\beta}{2}\,\cot\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \end{aligned}$$

da cui

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}}$$

4.19 Formule di Briggs

....

Riprendiamo il teorema di Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$$

$$2\,b\,c\,\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

In un triangolo è sempre $\alpha < 180°$, cioè $\frac{\alpha}{2} < 90°$ per cui non c'è problema di segno delle funzioni di $\frac{\alpha}{2}$ in quanto sono tutte positive, essendo l'angolo nel primo quadrante.

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}}{2}} = \sqrt{\frac{2\,b\,c - b^2 - c^2 + a^2}{4\,b\,c}} = \\
&= \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4\,b\,c}} = \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4\,b\,c}}
\end{aligned}$$

Poniamo ora

$$\begin{aligned}
a+b+c &= 2\,p \\
a+b-c &= 2\,p - 2\,c = 2\,(p-c) \\
a-b+c &= 2\,(p-b) \\
-a+b+c &= 2\,(p-a)
\end{aligned}$$

da cui

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2(p-c)\,2(p-b)}{4\,b\,c}} = \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-b)}{b\,c}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-b)}{b\,c}} \\
\sin\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{a\,c}} \\
\sin\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{a\,b}}
\end{aligned}}$$

6 logaritmi

....

Prendiamo ora il coseno:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}}{2}} = \sqrt{\frac{2\,b\,c + b^2 + c^2 - a^2}{4\,b\,c}} = \\
&= \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4\,b\,c}} = \sqrt{\frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{4\,b\,c}} = \sqrt{\frac{2p\,2(p-a)}{4\,b\,c}} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}} \\ \cos\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}} \\ \cos\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}} \end{aligned}}$$

7 logaritmi

....

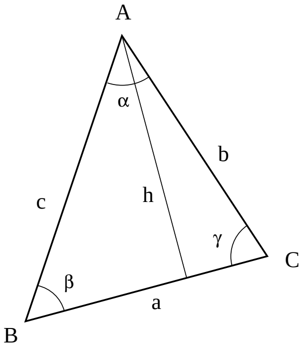
Infine la tangente:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-b)}{b\,c} \cdot \frac{b\,c}{p\,(p-a)}} = \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-b)}{p\,(p-a)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tan\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-b)}{p\,(p-a)}} \\ \tan\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}} \\ \tan\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}} \end{aligned}}$$

4 logaritmi

4.20 Area di un triangolo



$$A = \frac{a\,h}{2}$$

$$h = c\,\sin\beta$$

$$\boxed{A = \frac{a\,c\,\sin\beta}{2}}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c\,\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$A = \frac{1}{2}\,c^2\,\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta) \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\,c^2\,\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\,a\,c\sin 2\,\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\,a\,c\,2\,\sin\frac{\beta}{2}\,\cos\frac{\beta}{2} = \\ &= a\,c\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{a\,c}}\cdot\sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}} = a\,c\sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{a^2\,c^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}} \qquad \text{Formula di Erone}$$

Riprendiamo le formule di Briggs relative alla tangente:

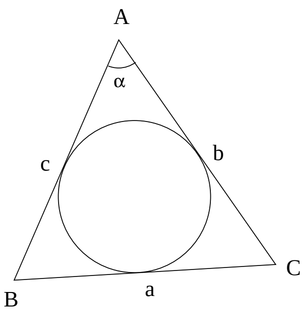
$$\begin{aligned} \tan\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{(p-c)\,(p-b)}{p\,(p-a)}} \\ \tan\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}} \\ \tan\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}} \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro si ottiene

$$\tan\frac{\alpha}{2}\,\tan\frac{\beta}{2}\,\tan\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p^4}} = \frac{A}{p^2}$$

$$\boxed{A = p^2\,\tan\frac{\alpha}{2}\,\tan\frac{\beta}{2}\,\tan\frac{\gamma}{2}}$$

4.21 Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo



Dalla geometria sappiamo che

$$r = \frac{A}{p}$$

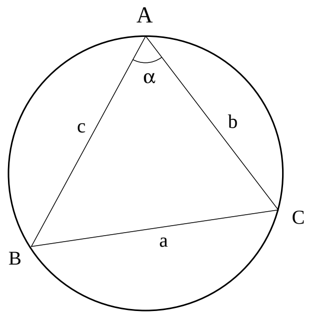
Per la formula di Erone scriviamo

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{p} = \\ &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}} \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)^2\,(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} = (p-a)\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} = (p-a)\,\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{r = (p-a)\,\tan\frac{\alpha}{2}}$$

4.22 Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo



Abbiamo già visto che $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2\,R$

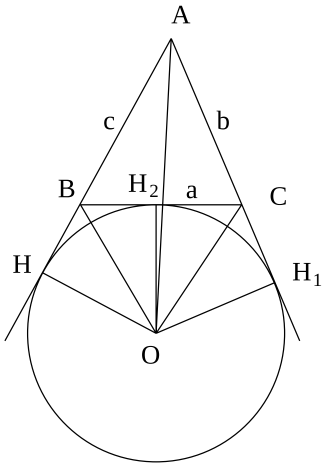
$$R = \frac{a}{2\,\sin\alpha} = \frac{a\,b\,c}{2\,b\,c\,\sin\alpha}$$

$$A = \frac{1}{2}\,b\,c\,\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad 2\,A = b\,c\,\sin\alpha$$

$$\boxed{R = \frac{a\,b\,c}{4\,A}}$$

4.23 Raggio della circonferenza exinscritta ad un triangolo

La circonferenza exinscritta ad un triangolo è quella circonferenza tangente ad un lato del triangolo ed al prolungamento degli altri due lati.



Calcoliamo l'area del triangolo ABC:

$$A(\mathrm{ABC}) = A(\mathrm{AOB}) + A(\mathrm{AOC}) - A(\mathrm{BOC})$$

$$A(\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2}\,c\,\overline{\mathrm{OH}} + \frac{1}{2}\,b\,\overline{\mathrm{OH}}_1 - \frac{1}{2}\,a\,\overline{\mathrm{OH}}_2$$

$$\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{OH}}_1 = \overline{\mathrm{OH}}_2 = r_a$$

$$\begin{aligned} A(\mathrm{ABC}) &= \frac{1}{2}\,c\,r_a + \frac{1}{2}\,b\,r_a - \frac{1}{2}\,a\,r_a = \frac{1}{2}\,r_a\,(c+b-a) = \\ &= \frac{1}{2}\,r_a\,2\,(p-a) = (p-a)\,r_a \end{aligned}$$

$$\boxed{r_a = \frac{A}{p-a}}$$

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{p-a} = \sqrt{\frac{p\,(p-b)\,(p-c)}{p-a}} = \\ &= \sqrt{\frac{p^2\,(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} = p\,\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}} = p\,\tan\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

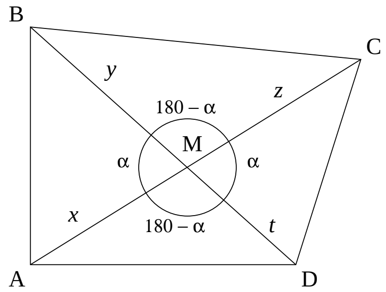
$$\boxed{r_a = p\,\tan\frac{\alpha}{2}}$$

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{A}{p} \cdot \frac{A}{p-a} \cdot \frac{A}{p-b} \cdot \frac{A}{p-c} = \frac{A^4}{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = A^2$$

$$A^2 = r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c$$

$$\boxed{A = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}$$

4.24 Area di un quadrilatero mediante le sue diagonali



$$\overline{AC} = d_1 \qquad \overline{BD} = d_2$$

$$\overline{AM} = x \quad \overline{BM} = y \quad \overline{CM} = z \quad \overline{DM} = t$$

L'area del quadrilatero è la somma delle singole aree dei 4 triangoli che hanno in comune il vertice M; ricordando che $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\,z\,y\,\sin\alpha + \frac{1}{2}\,t\,z\,\sin\alpha + \frac{1}{2}\,x\,t\,\sin\alpha + \frac{1}{2}\,x\,y\,\sin\alpha = \\ &= \frac{1}{2}\,\sin\alpha\,(z\,y + t\,z + x\,t + x\,y) = \\ &= \frac{1}{2}\,\sin\alpha\,[y\,(z+x) + t\,(x+z)] = \\ &= \frac{1}{2}\,\sin\alpha\,(z+x)\,(y+t) \end{aligned}$$

Essendo $z + x = d_1$ e $y + t = d_2$ si giunge al risultato:

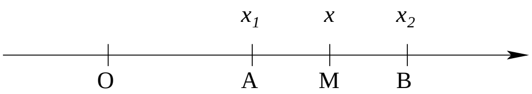
$$\boxed{A = \frac{1}{2}\,d_1\,d_2\,\sin\alpha}$$

Capitolo 5

Geometria Analitica

5.1 Prime definizioni, punti e rette

5.1.1 Ascissa del punto medio di un segmento



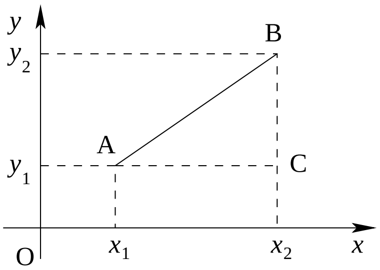
$$\overline{AM} = \overline{MB}$$

$$x - x_1 = x_2 - x$$

$$2x = x_1 + x_2$$

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}}$$

5.1.2 Distanza di due punti



$$A = (x_1; y_1) \quad B = (x_2; y_2)$$

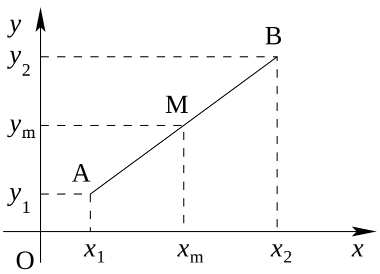
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AC} = x_2 - x_1$$

$$\overline{BC} = y_2 - y_1$$

$$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

5.1.3 Punto medio di un segmento



Per il teorema di Talete possiamo scrivere

$$x_m - x_1 = x_2 - x_m$$

da cui

$$2\,x_m = x_2 + x_1$$

$$\boxed{x_m = \frac{x_2 + x_1}{2}}$$

Analogamente, sempre per il teorema di Talete:

$$y_m - y_1 = y_2 - y_m$$

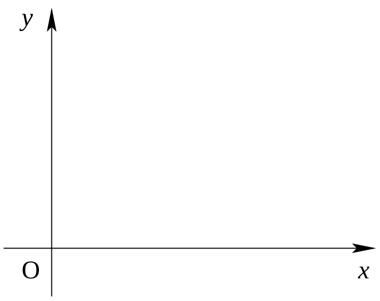
$$2\,y_m = y_2 + y_1$$

$$\boxed{y_m = \frac{y_2 + y_1}{2}}$$

Riassumendo

$$\boxed{\mathrm{M} = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}; \frac{y_2 + y_1}{2}\right)}$$

5.1.4 Equazione dell'asse delle ordinate y



Ogni punto dell'asse y ha ascissa $x = 0$, che quindi è l'equazione che individua l'asse delle ordinate.
Se prendiamo l'equazione di una retta generica

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

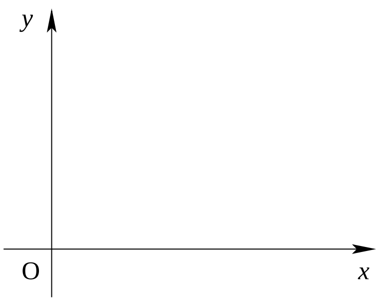
e poniamo $x = 0$, si ha

$$b\,y + c = 0$$

da cui

$$\boxed{y = -\frac{c}{b} = n}$$

5.1.5 Equazione dell'asse delle ascisse x



Ogni punto dell'asse x ha ordinata $y = 0$, che quindi è l'equazione che individua l'asse delle ascisse.
Se prendiamo l'equazione di una retta generica

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

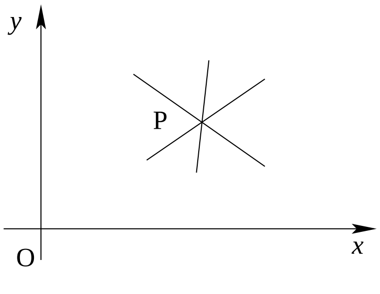
e poniamo $y = 0$, si ha

$$a\,x + c = 0$$

da cui

$$\boxed{x = -\frac{c}{a}}$$

5.1.6 Equazione di una retta passante per un punto dato



Prendiamo un fascio di rette per un punto $\mathrm{P} = (x_0; y_0)$, detto *sostegno*.
L'equazione di una retta generica è

$$y = m\,x + n$$

Questo significa che le infinite coppie $(x; y)$ che soddisfano quella equazione sono punti appartenenti alla retta. Fra questi, deve esserci anche il punto $\mathrm{P} = (x_0; y_0)$, perché il punto appartiene alla retta per ipotesi. Quindi si avrà

$$y_0 = m\,x_0 + n$$

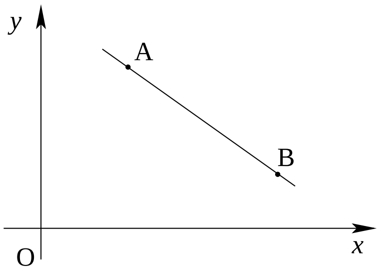
Sottraendo membro a membro le due equazioni sopra scritte:

$$\boxed{y - y_0 = m\,(x - x_0)}$$

Facendo variare m si ottengono le varie rette passanti per il punto P.

....

5.1.7 Equazione di una retta passante per due punti dati



Dati due punti A $= (x_1; y_1)$ e B $= (x_2; y_2)$, con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, vogliamo trovare la retta passante per entrambi (se $x_1 = x_2$ la retta sarebbe parallela all'asse y; se $y_1 = y_2$ la retta sarebbe parallela all'asse x).

Come visto, l'equazione di una retta generica per un punto A è

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \tag{5.1}$$

Se la retta passa per B, la coppia di coordinate di B $(x_2; y_2)$ deve soddisfare tale equazione, cioè

$$y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$$

Da quest'ultima equazione si ricava m, il coefficiente angolare della retta per A che passa anche per B:

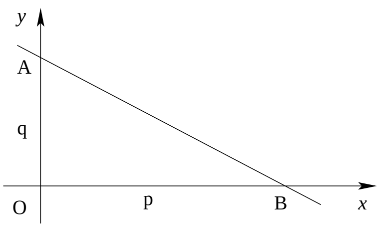
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sostituendo il valore di m appena trovato, nella equazione 5.1 si ottiene

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

....

5.1.8 Equazione segmentaria della retta



Poiché una retta è nota quando si conoscono due suoi punti, per ottenere il diagramma della retta

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

basterà conoscere i punti A e B in cui essa taglia gli assi coordinati.

$$\overline{\text{OA}} = q \qquad \overline{\text{OB}} = p$$

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{c}{a} = p \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{c}{b} = q \\ x = 0 \end{cases}$$

Riprendendo l'equazione della retta

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

dividendo tutto per c

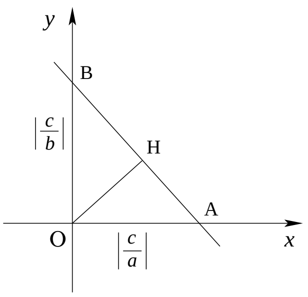
$$\frac{a}{c}\,x + \frac{b}{c}\,y + 1 = 0$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

. . . .

5.1.9 Distanza di un punto da una retta



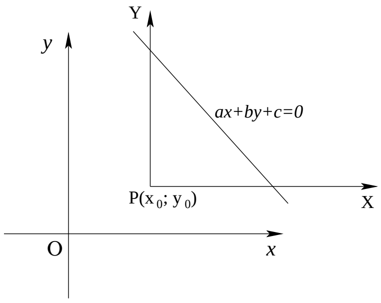
$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{c^2\,b^2 + c^2\,a^2}{a^2\,b^2}} = \left|\frac{c}{a\,b}\right| \sqrt{a^2 + b^2}$$

Per la similitudine fra i triangoli OAH e OAB

$$\frac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \frac{\overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$$

da cui

$$\overline{\mathrm{OH}} = \frac{\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OB}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \frac{\left|\frac{c}{a}\right| \cdot \left|\frac{c}{b}\right|}{\left|\frac{c}{a\,b}\right| \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Con riferimento alla figura qui affianco, in cui dobbiamo sapere la distanza di P dalla retta, riprendiamo le relazioni di traslazione degli assi:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

Sostituendo x e y nell'equazione della retta in figura, si ricava

$$a\,(X + x_0) + b\,(Y + y_0) + c = 0$$

$$a\,X + a\,x_0 + b\,Y + b\,y_0 + c = 0$$

$$a\,X + b\,Y + a\,x_0 + b\,y_0 + c = 0$$

Pertanto, sostituendo il termine noto di questa equazione al posto di c nell'espressione di $\overline{\mathrm{OH}}$ sopra vista, la distanza della retta dal punto generico P è:

$$\boxed{d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

. . . .

5.1.10 Condizione di parallelismo

Teorema 19. *Condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano parallele è che il loro coefficiente angolare sia uguale.*

Si hanno due rette le cui equazioni sono:

$$a\,x + b\,y + c = 0 \qquad a'\,x + b'\,y + c' = 0$$

Se queste rette si intersecassero, le coordinate del punto di incontro sarebbero la soluzione del sistema

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{-c\,b' + c'\,b}{a\,b' - a'\,b}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{-a\,c' + a'\,c}{a\,b' - a'\,b}$$

Si presentano ora tre casi:

1° caso: soluzioni determinate.

$$a\,b' - a'\,b \neq 0$$

$$a\,b' \neq a'\,b$$

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'} \quad \Rightarrow \quad m \neq m'$$

Quando le soluzioni sono determinate, cioè le rette si incontrano in un punto, i coefficienti angolari sono diversi.

2° caso: soluzioni impossibili.

$$a\,b' - a'\,b = 0$$

$$-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$$

$$\boxed{m = m'}$$

Quando le soluzioni sono impossibili, cioè le rette non hanno nessun punto in comune, i coefficienti angolari sono uguali.

3° caso: infinite soluzioni.

$$-c\,b' + c'\,b = 0$$

$$c\,b' = c'\,b$$

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

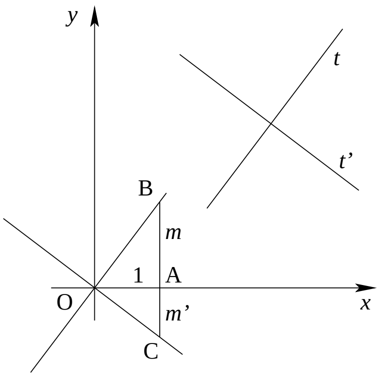
Essendo uguali i rapporti di tutti i termini, ci saranno infinite soluzioni: le due rette si incontrano in infiniti punti, quindi coincidono.

Pertanto la condizione per cui due rette risultano parallele è

$$\boxed{m = m'}$$

. . . .

5.1.11 Condizione di perpendicolarità



Date due rette t e t' di equazioni

$$y = m\,x + n$$

$$y = m'\,x + n'$$

vogliamo sapere per quali valori di m esse sono perpendicolari. Invece che sulle rette date, possiamo trattare l'argomento sulle parallele di tali rette, passanti per il punto O.

Il triangolo BOC è retto, quindi, per il 2° teorema di Euclide

$$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{AC}}$$

$$|m| : 1 = 1 : |m'|$$

$$|m| \cdot |m'| = 1$$

Dato che m' è negativo

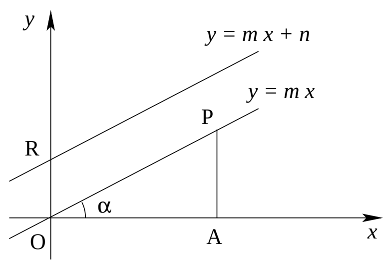
$$m \cdot m' = -1$$

$$\boxed{m = -\frac{1}{m'}} \quad \text{detto antireciproco.}$$

. . . .

5.1.12 Il coefficiente angolare

Teorema 20. *Il coefficiente angolare di una retta corrisponde alla tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse.*



Data una retta di equazione $y = m\,x + n$, prendiamo la sua parallela passante per l'origine degli assi; la sua equazione sarà $y = m\,x$.

$$\overline{\mathrm{OR}} = n \quad \widehat{\mathrm{POA}} = \alpha \quad \overline{\mathrm{OA}} = 1$$

$$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{OA}}\,\tan\alpha$$

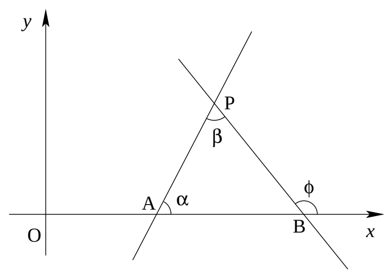
Se $\overline{\mathrm{OA}} = x$, il punto corrispondente sulla retta ha come ordinata $\overline{\mathrm{AP}} = y = m\,x$, per cui:

$$y = m\,x \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{AP}} = m\,\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OA}}\,\tan\alpha$$

$$\boxed{m = \tan\alpha}$$

. . . .

Teorema 21. *La tangente dell'angolo formato da due rette è uguale al rapporto fra la differenza dei coefficienti angolari delle due rette e la somma dell'unità e il prodotto dei coefficienti angolari delle rette stesse.*



$$\mathrm{PA}: \quad y = m'\,x + n' \qquad \mathrm{BP}: \quad y = m\,x + n$$

$$\beta = \alpha + \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \beta - \alpha$$

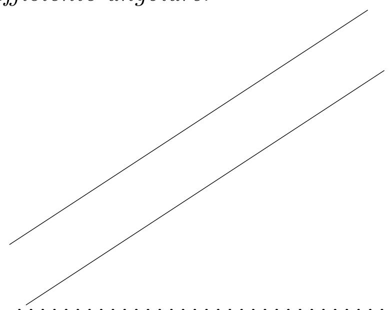
$$\tan\phi = \tan(\beta - \alpha)$$

$$\tan\phi = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\,\tan\alpha} = \frac{m - m'}{1 + m\,m'}$$

$$\boxed{\tan\phi = \frac{m - m'}{1 + m\,m'}}$$

. . . .

Teorema 22. *Condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano parallele è che abbiano lo stesso coefficiente angolare.*



Le rette formano un angolo di 0°, per cui

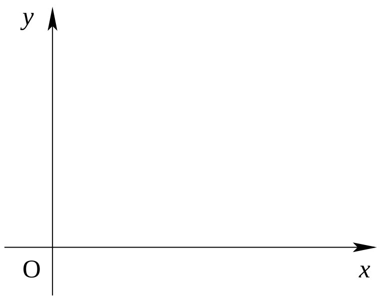
$$\tan\phi = 0$$

$$\tan\phi = \frac{m - m'}{1 + m\,m'} = 0$$

che è identicamente soddisfatta quando $m - m' = 0$, da cui

$$\boxed{m = m'}$$

Teorema 23. *Condizione necessaria e sufficiente perché due rette siano perpendicolari è che i coefficienti angolari siano opposti e reciproci, ossia uno sia l'antireciproco dell'altro.*



$$\widehat{yOx} = \phi = 90°$$

$$\cot\phi = \frac{1 + m\,m'}{m - m'}$$

$$\cot 90° = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 + m\,m'}{m - m'} = 0$$

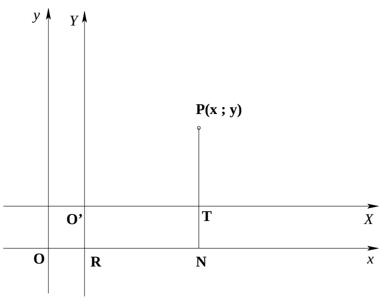
che è soddisfatta quando

$$1 + m\,m' = 0 \quad \Rightarrow \quad m\,m' = -1$$

da cui

$$\boxed{m = -\frac{1}{m'}}$$

5.2 Traslazione degli assi



$$\mathrm{P} = (x; y) \qquad \mathrm{O}' = (a; b)$$

$$\overline{\mathrm{ON}} = x = \overline{\mathrm{OR}} + \overline{\mathrm{RN}} = a + X$$

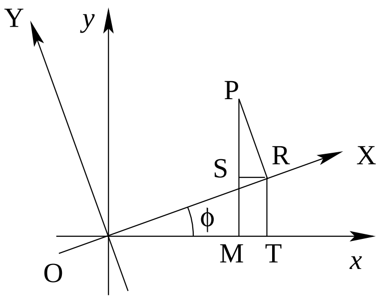
$$x = X + a$$

$$\overline{\mathrm{NP}} = x = \overline{\mathrm{NT}} + \overline{\mathrm{TP}} = b + Y$$

$$y = Y + b$$

$$\boxed{\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}}$$

5.3 Rotazione degli assi



Avendo un sistema di assi cartesiano ortogonali Oxy, gli facciamo compiere una rotazione di angolo ϕ e centro O. Dalla figura si può verificare facilmente che

$$\overline{\mathrm{OM}} = x_p \quad \text{e} \quad \overline{\mathrm{PM}} = y_p$$

$$\overline{\mathrm{OR}} = X_p \quad \text{e} \quad \overline{\mathrm{RP}} = Y_p$$

$$\overline{\mathrm{OM}} = x = \overline{\mathrm{OT}} - \overline{\mathrm{MT}} = \overline{\mathrm{OT}} - \overline{\mathrm{SR}}$$

Siccome l'angolo $\widehat{SRO}$ è ϕ perché alterni interni delle due parallele SR e x tagliate dalla trasversale X, e siccome $\widehat{SPR} = \widehat{SRO} = \phi$ perché complementari dello stesso angolo $\widehat{SRP}$, si può scrivere

$$\overline{\mathrm{OT}} = \overline{\mathrm{OR}} \cos\phi \quad \mathrm{e} \quad \overline{\mathrm{SR}} = \overline{\mathrm{PR}} \sin\phi$$

$$\overline{\mathrm{OT}} = X \cos\phi \quad \mathrm{e} \quad \overline{\mathrm{SR}} = Y \sin\phi$$

$$\overline{\mathrm{OM}} = x = \overline{\mathrm{OT}} - \overline{\mathrm{MT}} = \overline{\mathrm{OT}} - \overline{\mathrm{SR}} = \overline{\mathrm{OR}} \cos\phi - \overline{\mathrm{PR}} \sin\phi = X \cos\phi - Y \sin\phi$$

$$\boxed{x = X \cos\phi - Y \sin\phi}$$

Analogamente

$$\overline{\mathrm{MP}} = y = \overline{\mathrm{MS}} + \overline{\mathrm{SP}} = \overline{\mathrm{RT}} + \overline{\mathrm{SP}} = \overline{\mathrm{OR}} \sin\phi + \overline{\mathrm{PR}} \cos\phi = X \sin\phi + Y \cos\phi$$

$$\boxed{y = X \sin\phi + Y \cos\phi}$$

da cui

$$\boxed{\begin{cases} x = X \cos\phi - Y \sin\phi \\ y = X \sin\phi + Y \cos\phi \end{cases}}$$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} x & -\sin\phi \\ y & \cos\phi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}} \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} \cos\phi & x \\ \sin\phi & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}}$$

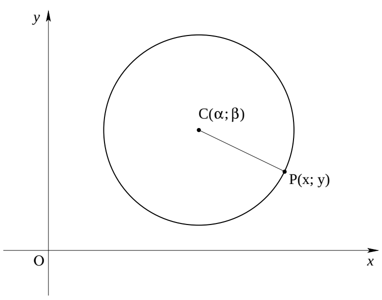
$$X = \frac{x \cos\phi + y \sin\phi}{\cos^2\phi + \sin^2\phi} \qquad Y = \frac{-x \sin\phi + y \cos\phi}{\cos^2\phi + \sin^2\phi}$$

$$X = \frac{x \cos\phi + y \sin\phi}{1} \qquad Y = \frac{-x \sin\phi + y \cos\phi}{1}$$

$$X = x \cos\phi + y \sin\phi \qquad Y = -x \sin\phi + y \cos\phi$$

$$\boxed{\begin{cases} X = x \cos\phi + y \sin\phi \\ Y = -x \sin\phi + y \cos\phi \end{cases}}$$

5.4 La circonferenza



In un sistema di assi cartesiani ortogonali abbiamo una circonferenza di centro C(α; β) e di raggio CP.
Se vogliamo conoscere gli elementi di questa circonferenza basta conoscere il raggio $\overline{\mathrm{CP}} = r$.
Con la formula della distanza possiamo ricavare $\overline{\mathrm{CP}}$:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$$

Questa è una prima equazione della circonferenza da usare quando sono dati il centro e il raggio.

$$x^2 - 2\,\alpha\,x + \alpha^2 + y^2 - 2\,\beta\,y + \beta^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2\,\alpha\,x - 2\,\beta\,y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Per comodità poniamo

$$-2\,\alpha = a$$

$$-2\,\beta = b$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0}$$

Questa è un'altra equazione della circonferenza.
Abbiamo visto che $\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$, da cui $\alpha^2 + \beta^2 - c = r^2$. Ma $r^2 > 0$ quindi

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 - c > 0}$$

Quando non è maggiore di 0, allora l'equazione non è una circonferenza.

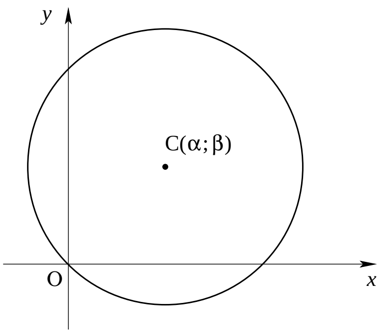
$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= -\frac{a}{2} \\ \beta &= -\frac{b}{2} \end{aligned}}$$

Teorema 24. *Condizioni necessarie e sufficienti perché una equazione esprimi una circonferenza sono: che i coefficienti delle incognite di secondo grado siano uguali, deve mancare il termine in $x\,y$, detto termine retto, e $\alpha^2 + \beta^2 - c > 0$. Altrimenti non è una circonferenza.*

. . . .

5.4.1 Casi particolari

1° caso: $c = 0$



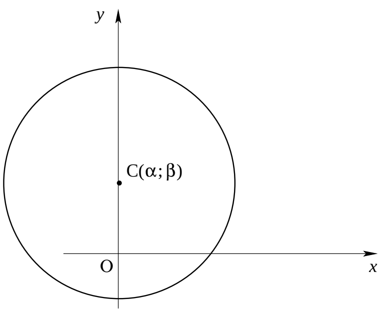
Se $c = 0$ l'equazione della circonferenza diviene

$$\boxed{x^2 + y^2 + a\,x + b\,y = 0}$$

$$c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 = r^2$$

Ma $\alpha^2 + \beta^2$, essendo il quadrato del raggio, non può essere che il quadrato della distanza dal centro ad un punto della circonferenza. Tale punto ha coordinate nulle, cioè è l'origine degli assi O(0; 0), per cui la circonferenza passerà per l'origine.

2° caso: $a = 0$

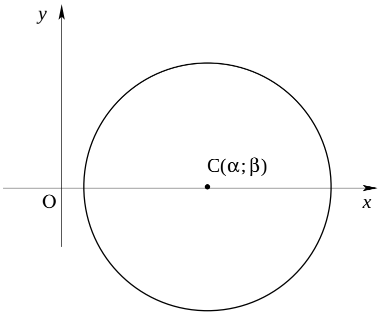


$$a = 0 \quad a = -2\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$

La circonferenza avrà come centro un punto dell'asse y essendo nulla l'ascissa α del centro.

$$\boxed{x^2 + y^2 + b\,y + c = 0}$$

3° caso: $b = 0$

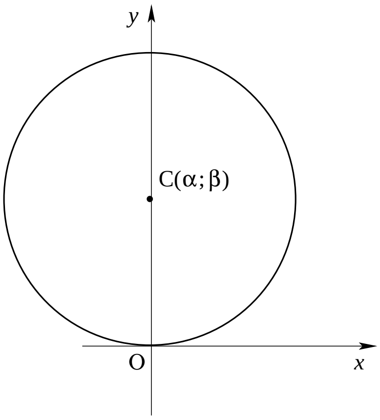


$$b = 0 \quad b = -2\,\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 0$$

La circonferenza avrà come centro un punto dell'asse x essendo nulla l'ordinata β del centro.

$$\boxed{x^2 + y^2 + a\,x + c = 0}$$

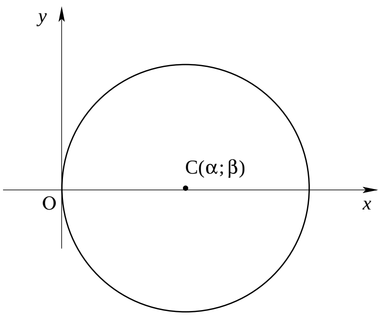
4° caso: $a = 0,\ c = 0$



$$a = 0 \quad c = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + b\,y = 0}$$

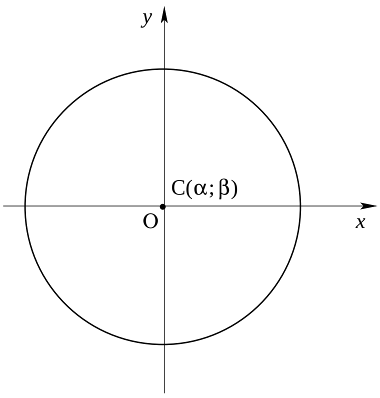
5° caso: $b = 0,\ c = 0$



$$b = 0 \quad c = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 + a\,x = 0}$$

6° caso: $a = 0,\ b = 0$



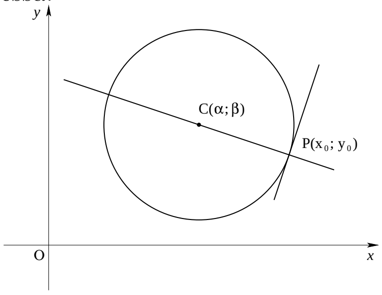
$$a = 0 \quad b = 0 \quad \alpha = 0 \quad \beta = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = -c}$$

. . . .

5.4.2 Formula di sdoppiamento

La formula di sdoppiamento serve per ricavare la tangente a una circonferenza per un punto appartenente ad essa.



$$m_{\mathrm{CP}} = \frac{y_0 - \beta}{x_0 - \alpha}$$

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - \alpha}{y_0 - \beta}\,(x - x_0)$$

$$(y - y_0)\,(y_0 - \beta) = (\alpha - x_0)\,(x - x_0)$$

$$y\,y_0 - \beta\,y - y_0^2 + y_0\,\beta = \alpha\,x - \alpha\,x_0 - x_0\,x + x_0^2$$

$$x_0\,x + y_0\,y - \alpha\,x - \beta\,y = x_0^2 + y_0^2 - \alpha\,x_0 - \beta\,y_0$$

Ricordiamo che l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 - 2\,\alpha x - 2\,\beta\,y + c = 0$$

Sostituendo le coordinate del punto P:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2\,\alpha\,x_0 - 2\,\beta\,y_0 + c = 0$$

da cui

$$x_0^2 + y_0^2 - \alpha\,x_0 - \beta\,y_0 = \alpha\,x_0 + \beta\,y_0 - c$$

Il primo membro di questa equazione è uguale al secondo membro della 5.4.2, per cui possiamo riscrivere la 5.4.2 come:

$$x_0\,x + y_0\,y - \alpha\,x - \beta\,y = \alpha\,x_0 + \beta\,y_0 - c$$

$$x_0\,x + y_0\,y - \alpha\,(x + x_0) - \beta\,(y + y_0) + c = 0\,.$$

Poniamo

$$\begin{cases} -2\,\alpha = a \quad \Rightarrow \quad -\alpha = \dfrac{a}{2} \\[2ex] -2\,\beta = b \quad \Rightarrow \quad -\beta = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

da cui si ottiene l'equazione della tangente a una circonferenza per un punto appartenente ad essa:

$$\boxed{x_0\,x + y_0\,y + a\,\frac{x + x_0}{2} + b\,\frac{y + y_0}{2} + c = 0}$$

. . . .

5.4.3 Punti intersezione fra due circonferenze

Per trovare i punti di intersezione fra due circonferenze si prendono le rispettive equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases}$$

sottraendo membro a membro si ottiene l'equazione di una retta. Tale retta è l'asse radicale, ossia l'asse che passa dai due punti di intersezione delle circonferenze.

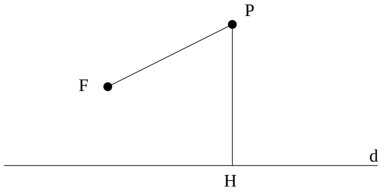
Mettiamo l'equazione dell'asse radicale in sistema con l'equazione di una delle due circonferenze:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \\ (a - a')\,x + (b - b')\,y + c - c' = 0 \end{cases}$$

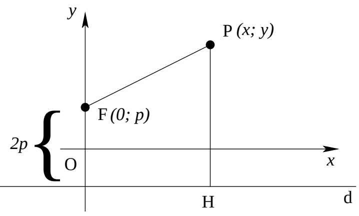
Risolvendo tale sistema si ottengono i punti di intersezione fra la retta e la circonferenza, ossia fra le due circonferenze.

5.5 La parabola

Definizione 16. *La parabola è il luogo geometrico di tutti i punti del piano equidistanti da un punto, detto* fuoco, *e da una retta, detta* direttrice.



$$\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{HP}}$$



Portiamo una retta passante per F e perpendicolare a d, e prrendiamola come asse y; portiamo una seconda retta, passante per il punto medio tra F e d, perpendicolare all'asse delle y, e prendiamola come asse delle x.
Stabilita la distanza fra F e d uguale a $2\,p$, F avrà coordinate $(0; p)$;

$$\mathrm{F}\,(0; p); \quad \mathrm{P}\,(x; y); \quad \mathrm{H}\,(x; -p)$$

$$\overline{\mathrm{PF}} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$\overline{\mathrm{PH}} = y + p$$

$$\overline{\mathrm{PF}} = \overline{\mathrm{PH}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p$$

$$x^2 + y^2 - 2\,p\,y + p^2 = y^2 + 2\,p\,y + p^2$$

$$x^2 = 4\,p\,y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4\,p}\,x^2$$

Ponendo $\dfrac{1}{4\,p} = a$:

$$\boxed{y = a\,x^2}$$

Tale equazione rappresenta una parabola che ha per vertice l'origine degli assi cartesiani, e per asse di simmetria l'asse delle y.

$$4\,p = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4\,a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{F}\,(0; \frac{1}{4\,a})}$$

La direttrice ha per equazione $y = -p$, ossia

$$\boxed{y = -\frac{1}{4\,a}}$$

Mediante lo stesso ragionamento si dimostra che la parabola $x = a\,y^2$ ha per asse di simmetria quello delle x; la sua direttrice sarà $x = -\dfrac{1}{4\,a}$ e il suo fuoco F $(\dfrac{1}{4\,a}; 0)$.

$$y = a\,x^2 \qquad x^2 = \frac{y}{a}$$

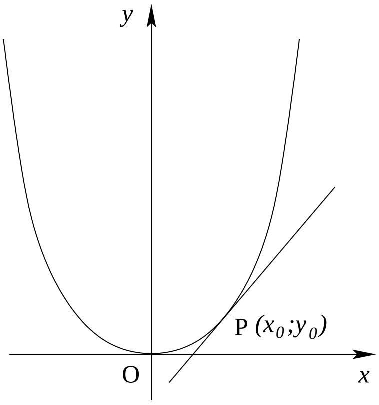
$$x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{a} > 0$$

$\begin{cases} a > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ In questo caso la parabola avrà la concavità rivolta verso l'alto, perché le y saranno tutte positive.

$\begin{cases} a < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ In questo caso la parabola avrà la concavità rivolta verso il basso, perché le y saranno tutte negative.

. . . .

5.5.1 Tangente ad una parabola



Per la condizione di appartenenza

$$y_0 = a\,x_0^2$$

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

$$\begin{cases} y = m\,x - m\,x_0 + y_0 \\ y = a\,x^2 \end{cases}$$

$$a\,x^2 = m\,x - m\,x_0 + y_0$$

$$a\,x^2 - m\,x + m\,x_0 - y_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= m^2 - 4\,a\,(m\,x_0 - y_0) = m^2 - 4\,a\,m\,x_0 + 4\,a\,y_0 \\ &= m^2 - 4\,a\,m\,x_0 + 4\,a\,x_0^2 = (m - 2\,a\,x_0)^2 \end{aligned}$$

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad m - 2\,a\,x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 2\,a\,x_0$$

$$y - y_0 = 2\,a\,x_0\,(x - x_0)$$

$$y - y_0 = 2\,a\,x_0\,x - 2\,a\,x_0^2$$

$$y + y_0 - 2\,y_0 = 2\,a\,x_0\,x$$

$$\boxed{\frac{y + y_0}{2} = a\,x_0\,x} \quad \text{Formula di sdoppiamento}$$

Notare che la formula di sdoppiamento ha la forma di una parabola $y = a\,x^2$, dove il termine lineare y è rappresentato dal termine lineare $\frac{y + y_0}{2}$, e il termine quadratico x^2 è rappresentato dal termine quadratico $a\,x_0\,x$.

. . . .

5.5.2 Parabola con il vertice su un punto $\mathrm{P}\,(x_0; y_0)$, dove $x_0 \neq 0;\ y \neq 0$

Vogliamo vedere se l'equazione $y = a\,x^2 + b\,x + c$ rappresenta una parabola.

$$y = a\,(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a})$$

$$y = a\,(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{b^2}{4\,a^2} + \frac{c}{a})$$

$$y = a\,\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right]$$

$$y = a\,\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a}$$

$$y + \frac{\Delta}{4\,a} = a\,\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2$$

Ponendo

$$x + \frac{b}{2\,a} = X$$

$$y + \frac{\Delta}{4\,a} = Y$$

$$\boxed{Y = a\,X^2}$$

Questa è l'equazione di una nuova parabola i cui elementi principali sono:

$$\begin{cases} x = X - \dfrac{b}{2\,a} \\ y = Y - \dfrac{\Delta}{4\,a} \end{cases}$$

Possiamo intendere $-\dfrac{b}{2\,a}$ e $-\dfrac{\Delta}{4\,a}$ come le coordinate di un nuovo origine degli assi, ossia del vertice della parabola:

$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2\,a};\ -\frac{\Delta}{4\,a}\right)}$$

$$F\ (X;\ Y) = \left(0;\ \frac{1}{4\,a}\right)$$

$$x = X - \frac{b}{2\,a} = 0 - \frac{b}{2\,a} = -\frac{b}{2\,a}$$

$$y = Y - \frac{\Delta}{4\,a} = \frac{1}{4\,a} - \frac{\Delta}{4\,a} = \frac{1-\Delta}{4\,a}$$

$$\boxed{F\,(x;\ y) = \left(-\frac{b}{2\,a};\ \frac{1-\Delta}{4\,a}\right)}$$

L'equazione della direttrice sarà:

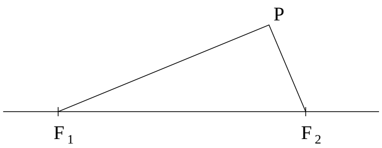
$$Y = -\frac{1}{4\,a}$$

$$y = -\frac{1}{4\,a} - \frac{\Delta}{4\,a} = -\frac{1+\Delta}{4\,a}$$

$$\boxed{y = -\frac{1+\Delta}{4\,a}}$$

Per trovare le coordinate del vertice basta trovare x_0, ossia $-\dfrac{b}{2\,a}$, e sostituirlo nella equazione che, risolta, darà il valore di y_0.

5.6 L'ellisse

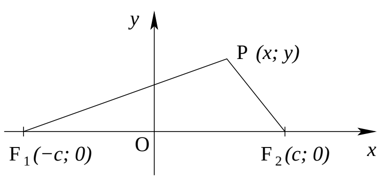


L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per cui la somma delle distanze da due punti dati è costante.
Dati due punti F_1 e F_2 detti **fuochi** la cui distanza sia uguale a $2\,c$ (distanza focale), ed un punto P qualsiasi, perché esso descriva un'ellisse si deve verificare che
$\overline{\mathrm{F_1P}} + \overline{\mathrm{F_2P}} = 2\,a$

$$\overline{\mathrm{F_1F_2}} = 2\,c \qquad \text{distanza focale}$$

$$\overline{\mathrm{F_1F_2}} < \overline{\mathrm{F_1P}} + \overline{\mathrm{F_2P}} \quad \Rightarrow \quad 2\,c < 2\,a \quad \Rightarrow \quad c < a$$

$\boxed{a > c}$ Disuguaglianza fondamentale dell'ellisse.



La retta che passa per F_1 e F_2 la prendiamo come asse delle ascisse e la retta perpendicolare a questa passante per il punto medio O di $\overline{\mathrm{F_1F_2}}$ la prendiamo come asse delle ordinate.

$$F_1\,(-c;\,0)\quad F_2\,(c;\,0)\quad P\,(x;\,y)$$
$$\overline{\mathrm{F_1P}}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\quad \overline{\mathrm{F_2P}}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2\,a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2\,a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\cancel{x^2}+2\,x\,c+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4\,a^2-4\,a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2\,x\,c+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$
$$4\,x\,c-4\,a^2=-4\,a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$x\,c-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$x^2\,c^2-\cancel{2\,a^2\,x\,c}+a^4=a^2\,x^2-\cancel{2\,a^2\,x\,c}+a^2\,c^2+a^2\,y^2$$
$$x^2\,c^2+a^4=a^2\,x^2+a^2\,c^2+a^2\,y^2$$
$$a^2\,x^2-x^2\,c^2+a^2\,y^2=a^4-a^2\,c^2$$
$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2\,y^2=a^2\,(a^2-c^2)$$

Dato che $a>c$, $a^2-c^2>0$ e possiamo eguagliarlo ad un numero sicuramente positivo come un altro quadrato:

$$a^2-c^2=b^2$$

da cui

$$b^2\,x^2+a^2\,y^2=a^2\,b^2$$

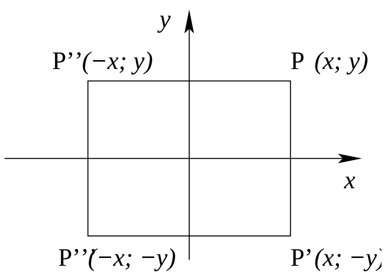
Dividendo tutto per $a^2\,b^2$ si ha:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$ Questa è l'equazione cartesiana di un'ellisse.

5.6.1 Proprietà dell'ellisse

Proprietà di simmetria

Teorema 25. *L'ellisse è simmetrica rispetto agli assi x e y e all'origine delle coordinate.*



Vogliamo dimostrare che se il punto P di coordinate $(x;\,y)$ appartiene all'ellisse, cioè le coordinate x e y soddisfano l'equazione cartesiana che la esprime, ossia si verifica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

anche i punti P'$(x;\,-y)$, P"$(-x;\,y)$ e P"'$(-x;\,-y)$, rispettivamente simmetrici del punto P rispetto all'asse x, all'asse y e all'origine, appartengono all'ellisse.

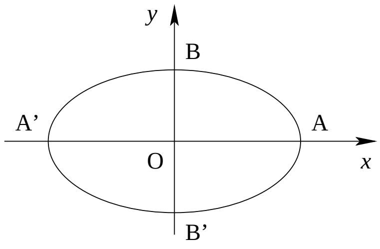
Infatti si può scrivere:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1\quad\text{ossia}\quad\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,;$$
$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad\text{ossia}\quad\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,;$$
$$\frac{(-x)^2}{a^2}+\frac{(-y)^2}{b^2}=1\quad\text{ossia}\quad\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

che esprimono l'appartenenza di P', P" e P"' all'ellisse.

Proprietà dei vertici

Teorema 26. *L'ellisse è compresa entro certi valori massimi e minimi della x e della y che, riportati sugli assi, determinano i vertici dell'ellisse.*



Le intersezioni dell'ellisse con gli assi si ottengono risolvendo i sistemi

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2=a^2 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2=a^2 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\pm a \\ y=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y=\pm b \\ x=0 \end{cases}$$

L'ellisse incontra l'asse x nei punti A(a; 0) e A'($-a$; 0) che si chiamano **vertici principali**: il segmento $\overline{\mathrm{AA}'}=2\,a$ si chiama **asse maggiore** o **asse focale** dell'ellisse, mentre il segmento $\overline{\mathrm{OA}}=a$ si chiama **semiasse maggiore**.

Ancora. L'ellisse incontra l'asse y nei punti B(0; b) e B'(0; $-b$) che si chiamano **vertici secondari**: il segmento $\overline{\mathrm{BB}'}=2\,b$ si chiama **asse minore** dell'ellisse, mentre il segmento $\overline{\mathrm{OB}}=b$ si chiama **semiasse minore**.

Si deve dimostrare ora che i valori $+a$ e $-a$ sono, rispettivamente, i punti di massima e di minima ascissa, e che i valori di $+b$ e $-b$ sono quelli di massima e minima ordinata.

Risolvendo l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

rispetto alla y, abbiamo che

$$y^2=\frac{a^2\,b^2-b^2\,x^2}{a^2}$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}\,(a^2-x^2)$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\,\sqrt{a^2-x^2}$$

$$a^2-x^2\geq 0$$

le cui soluzioni saranno:

$$-a\leq x\leq a$$

perciò i punti reali della curva saranno compresi fra le rette $x=a$ e $x=-a$.

Analogamente per le ordinate:

$$x^2=a^2-a^2\,\frac{y^2}{b^2}$$

$$x^2=\frac{a^2b^2-a^2y^2}{b^2}$$

$$x^2=\frac{a^2}{b^2}\,(b^2-y^2)$$

$$x=\pm\frac{a}{b2}\,\sqrt{b^2-y^2}$$

$$b^2-y^2\geq 0$$

le cui soluzioni saranno:

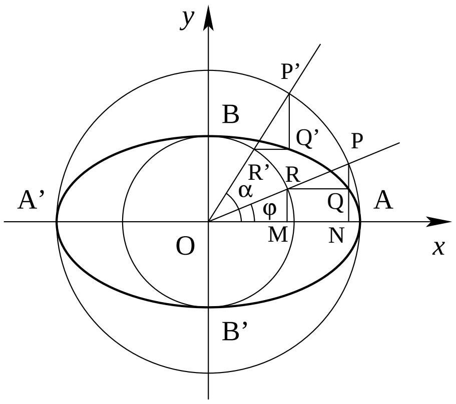
$$-b\leq y\leq b$$

perciò i punti reali della curva saranno compresi fra le rette $y=b$ e $y=-b$.

Perciò l'ellisse risulta interna alle rette $x=\pm a$ e $y=\pm b$.

. . . .

5.6.2 Costruzione dell'ellisse per punti dati i semiassi $\overline{\text{OA}} = a$ e $\overline{\text{OB}} = b$



Dati i due assi $\overline{\text{AA}'}$ e $\overline{\text{BB}'}$ in posizione e grandezza. Con centro in O e raggio $\overline{\text{OB}}$ descriviamo un cerchio tangente internamente l'ellisse in B e B'. Poi con centro in O e raggio $\overline{\text{OA}}$ descriviamo un cerchio tangente esternamente l'ellisse in A e A'. Facciamo partire da O delle rette che incontreranno le due circonferenze, ad esempio, nei punti P e R. Conducendo da R (punto di intersezione del raggio $\overline{\text{OP}}$ con il cerchio $(O; b)$) la parallela all'asse x e da P la parallela all'asse y, si trova l'intersezione delle due parallele Q che è un punto dell'ellisse. Per dimostrare che esso è un punto dell'ellisse, ricordiamo la trigonometria:

$$x = \overline{\text{ON}} = \overline{\text{OP}} \cos\varphi$$

essendo $\overline{\text{OP}} = a$

$$x = a \cos\varphi$$

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi$$

Analogamente per $y = \overline{\text{NQ}} = \overline{\text{MR}} = \overline{\text{OR}} \sin\varphi$

$$y = \overline{\text{OR}} \sin\varphi$$

siccome $\overline{\text{OR}} = b$

$$y = b \sin\varphi$$

$$\frac{y}{b} = \sin\varphi$$

Dalle due relazioni $\frac{x}{a} = \cos\varphi$ e $\frac{y}{b} = \sin\varphi$ e sommando membro a membro i loro quadrati

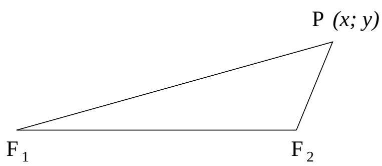
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$$

da cui

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

5.7 L'iperbole

Definizione 17. *L'iperbole è il luogo geometrico di tutti i punti del piano per cui è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.*



Presi due punti F_1 e F_2 ed un punto P_1, esso descrive un'iperbole quando la differenza in valore assoluto delle due distanze da F_1 ed F_2 è costante. Ossia

$$\left|\overline{\text{F}_1\text{P}} - \overline{\text{F}_2\text{P}}\right| = 2\,a$$

$$\overline{\text{F}_1\text{F}_2} > \overline{\text{F}_1\text{P}} - \overline{\text{F}_2\text{P}}$$

$$2\,c > 2\,a \quad \Rightarrow \quad \boxed{c > a}$$ Disuguaglianza fondamentale dell'iperbole.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2\,a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2\,a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\cancel{x^2} + 2\,x\,c + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4\,a^2 + 4\,a\,\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 2\,c\,x + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$
$$\cancel{4}\,c\,x = \cancel{4}\,a^2 + \cancel{4}\,a\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$c\,x - a^2 = a\,\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$c^2x^2 - \cancel{2\,a^2\,c\,x} + a^2 = a^2x^2 - \cancel{2\,a^2\,c\,x} + a^2c^2 + a^2y^2$$
$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$
$$(c^2 - a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

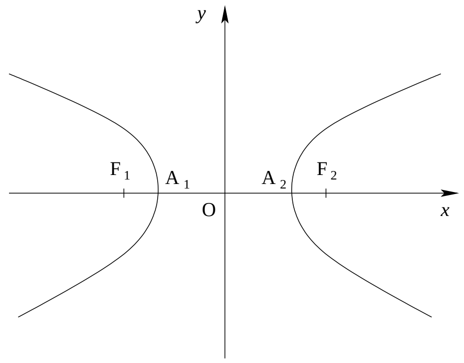
Dato che $c > a$, è anche $c^2 > a^2$, cioè $c^2 - a^2 = b^2$, e l'equazione diventa

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Assumendo la retta passante per $\mathrm{F_1F_2}$ come asse delle ascisse, e la retta passante per il punto medio di $\overline{\mathrm{F_1F_2}}$ perpendicolare all'asse x come asse delle ordinate, si può avere un sistema di riferimento di assi cartesiani ortogonali in cui

$$\mathrm{F_1} \equiv (-c;\ 0) \quad \mathrm{F_2} \equiv (c;\ 0)$$



Per ricavarsi $\mathrm{A_1}$ e $\mathrm{A_2}$ (punti in cui le iperboli incontrano l'asse x)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm a$$

$\mathrm{A_1}\,(-a;\ 0)$ $\mathrm{A_2}\,(a;\ 0)$ Vertici dell'iperbole

$\overline{\mathrm{A_1A_2}} = 2\,a$ Asse trasverso dell'iperbole

Per ricavare le intersezioni dell'iperbole con l'asse y

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -b^2$$

Nel campo reale essa non ammette soluzioni; le avrà invece nel campo di Gauss.

L'iperbole non incontra l'asse y che perciò viene detto asse ideale dell'iperbole.

Capitolo 6

Analisi Matematica

6.1 Limiti

Avendo una retta possiamo fissare su essa due punti qualsiasi.

L'intervallo di retta compresa fra a e b è detto intervallo finito e viene indicato con $[a, b]$). *L'intervallo finito è l'insieme di tutti i numeri reali compresi fra a e b.*

a è chiamato estremo sinistro;

b è chiamato estremo destro;

$b - a$ è l'ampiezza dell'intervallo.

La scritta

$$a \leq x \leq b$$

si chiama intervallo chiuso, e la scritta

$$a < x < b$$

si chiama intervallo aperto. Inoltre la scritta

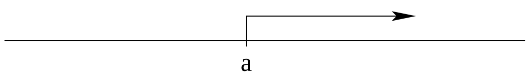
$$a \leq x < b$$

si chiama intervallo aperto a destra, e la scritta

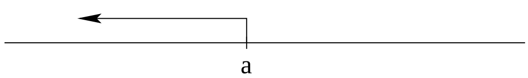
$$a < x \leq b$$

si chiama intervallo aperto a sinistra.

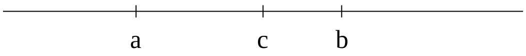
Tutti i numeri reali non minori di a sono i numeri che sulla retta vengono rappresentati alla destra di a e si indicano con $(a; +\infty)$.



Tutti i numeri reali non maggiori di a sono i numeri che sulla retta vengono rappresentati alla sinistra di a e si indicano con $(-\infty; a)$.



Tutti i numeri reali si indicano con $(-\infty; +\infty)$.



Definizione 18. *L'intorno completo o, semplicemente, intorno di un numero c è un intervallo che contiene c.*

L'intorno destro di c è l'intorno di c di cui esso è l'estremo sinistro.

L'intorno sinistro di c è l'intorno di c di cui esso è l'estremo destro.

Riassumendo:

Definizione 19. *L'intorno destro o sinistro di un numero è qualsiasi intervallo contenente il punto come estremo, rispettivamente, sinistro o destro.*

Ricordiamo che una funzione si dice *algebrica* quando vi sono in essa delle operazioni dell'algebra. Può essere trascendente se se in essa un'incognita è presente in una funzione trigonometrica, come esponente di un numero o all'interno di un logaritmo. Può essere inoltre intera o fratta, razionale o irrazionale alla pari delle equazioni.

Il campo di esistenza della funzione $y = f(x)$ è l'insieme di tutti i numeri reali da dare alla x perché la y assuma valori reali.

Avendo la funzione

$$y = f(x) \quad (a; b)$$

Chiamiamo limite l della funzione quando x tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

il numero che, fissato un numero *varepsilon* piccolissimo a nostro arbitrio, determina l'esistenza di un intono di x_0 in modo che

$$\boxed{|f(x) - l| < \varepsilon}$$

ovvero

$$\pm (f(x) - l) < \varepsilon$$

$$\begin{cases} f(x) - l < \varepsilon & \Rightarrow \quad f(x) < \varepsilon - l \\ -f(x) + l < \varepsilon & \Rightarrow \quad -f(x) < \varepsilon - l \end{cases}$$

$$l - e < f(x) < l + \varepsilon$$

Quando abbiamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

possiamo capire che la funzione tende a zero in quanto

$$|f(x)| < \varepsilon \quad \text{ossia} \quad -\varepsilon < f(x) < +\varepsilon$$

Avendo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

essa si può verificare se $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$ sono intorni di x_0.

. . . .

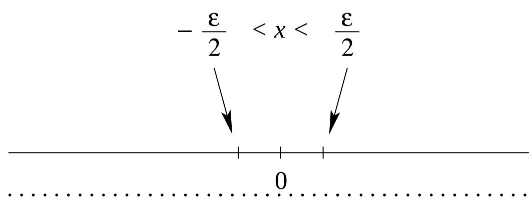
Esempio: Vogliamo verificare che

$$\lim_{x \to 2} (3\,x - 1) = 5$$

$$5 - \varepsilon < 3\,x - 1 < 5 + \varepsilon$$

$$\begin{cases} 3\,x - 1 > 5 - \varepsilon & \Rightarrow \quad 3\,x > 6 - \varepsilon \\ 3\,x - 1 < 5 + \varepsilon & \Rightarrow \quad 3\,x < 6 + \varepsilon \end{cases}$$

$$2 - \frac{\varepsilon}{3} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{3}$$



Esempio: Verifichiamo che

$$\lim_{x \to 1}(2\,x+3) = 3$$

$$3-\varepsilon < 2\,x+3 < 3+\varepsilon$$

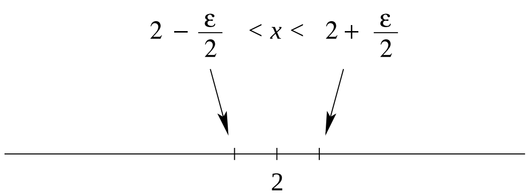
$$2\,x+3 > 3-\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2\,x > -\varepsilon$$

$$2\,x+3 < 3+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2\,x < \varepsilon$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2}$$

ma $\left(-\frac{\varepsilon}{2};\frac{\varepsilon}{2}\right)$ non è intorno di 1 per cui

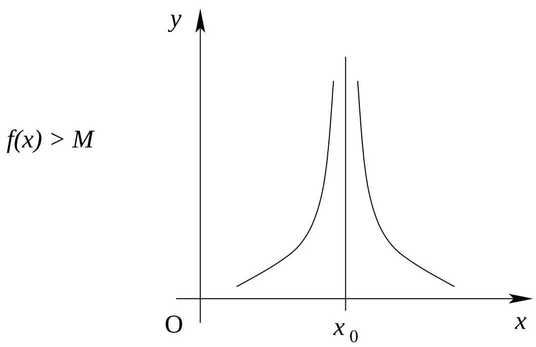
$$\lim_{x \to 1}(2\,x+3) \neq 3$$



Il $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x}$ ossia per x tendente a 0 da sinistra non esiste in quanto non si possono assumere numeri negativi di x, che sono quelli, appunto, a sinistra di 0. Esiste invece $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}$ ossia di x tendente a 0 da destra.

Si può facilmente vedere anche che

$$\lim_{x \to 0^-}\left(x+\frac{x}{|x|}\right) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+}\left(x+\frac{x}{|x|}\right) = +1$$



Definizione 20. *Una funzione ammette per limite $+\infty$, ossia*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

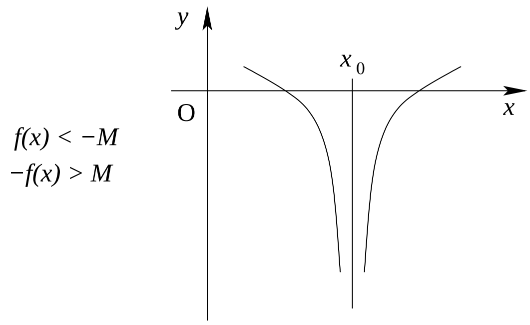
quando, fissato un numero grandissimo M a nostro arbitrio, è sempre possibile trovare in intorno di x_0 in modo che in esso la funzione assuma valori più grandi di M.

. . . .

Definizione 21. *Una funzione ammette per limite $-\infty$, ossia*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

quando, fissato un numero piccolissimo $-M$ a nostro arbitrio, è sempre possibile trovare un intorno di x_0 in modo che in esso la funzione assuma valori inferiori a $-M$.



. . . .

Teorema 27.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty}$$

Possiamo trovare un valore di x tale che

$$\left|\frac{1}{x}\right| < M \quad \text{da cui} \quad |x| < \frac{1}{M}$$

ma $\frac{1}{M} = \varepsilon \;\Rightarrow\; |x| < \varepsilon$ cioè $\pm x < \varepsilon$

$$\begin{cases} x < \varepsilon \\ -x < \varepsilon \;\Rightarrow\; x > -\varepsilon \end{cases}$$

$$-\varepsilon < x < \varepsilon$$

La relazione è vera in quanto $(-\varepsilon; \varepsilon$ è un intorno di $x_0 \equiv 0$.

. . . .

Definizione 22. *Una funzione ammette per limite l per x che tende all'infinito, ossia:*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

quando, fissato un numero piccolissimo a nostro arbitrio, è possibile trovare un numero N grandissimo a nostro arbitrio tale che il valore assoluto di x sia maggiore di N.

. . . .

Teorema 28.

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$$

$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, invertendo $|x| < \frac{1}{\varepsilon}$, ma $\frac{1}{\varepsilon} = N$. La condizione, perciò, si realizza solo se $|x| > N$.

. . . .

Teorema 29.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} [-f(x)] = -l}$$

Avendo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow |l - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow |-f(x) - (-l)| < \varepsilon$$

ossia proprio

$$\lim_{x \to x_0} [-f(x)] = -l$$

Pertanto:

Il limite dell'opposto di una funzione per x che tende a x_0 è uguale all'opposto del limite della funzione.

. . . .

Teorema 30.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} k = k}$$

Avendo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

sostituendo k a $f(x)$ e a l, vediamo che $|k - k| < \varepsilon$, che è sempre verificata, pertanto

Il limite di una costante per x che tende a x_0 è uguale alla costante stessa.

. . . .

Teorema 31.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} [f(x) - R] = l - R}$$

Avendo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Sommando e sottraendo una stessa quantità R costante

$$|f(x) - R + R - l| < \varepsilon \Rightarrow |(f(x) - R) - (l - R)| < \varepsilon$$

ossia $\lim_{x \to x_0} [f(x) - R] = l - R$

Il limite di una funzione diminuita di una costante per x che tende a x_0 è uguale al limite della funzione diminuito della costante.

. . . .

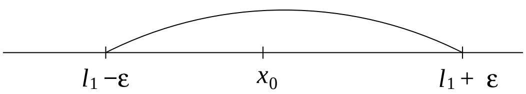
Teorema dell'unicità dei limiti

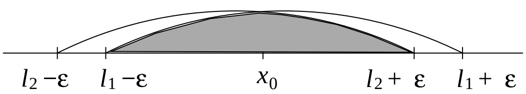
Se una funzione ammette un limite, non ne ammette altri.

Prendiamo una funzione e supponiamo che abbia due limiti per $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \text{ e } \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \quad \text{con} \quad l_1 > l_2$$

Per il primo limite $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$





Per il secondo limite $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$
pertanto, avendo un intervallo comune $l_1 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$, da cui

$$l_1 - \varepsilon < l_2 + \varepsilon$$

$$-2\,\varepsilon < -l_1 + l_2 \;\Rightarrow\; l_1 - l_2 < 2\,\varepsilon$$

ma siccome ε è una quantità piccola a piacere, è necessario che l_1 sia uguale a l_2.

. . . .

Teorema della permanenza del segno

Se una funzione di x ammette per limite l, diverso da 0 e da ∞, per x che tende a x_0, esiste un intorno di x_0 in cui la funzione assume lo stesso segno di l.

Avendo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \begin{cases} l \neq \infty \\ l \neq 0 \end{cases}$$

1. $l > 0$: $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ e possiamo verificare che c'è un intorno di x_0 in cui $\varepsilon < l$, pertanto $l - \varepsilon > 0$ e $l + \varepsilon > 0$, e di conseguenza $f(x) > 0$;

2. $l < 0$: $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ e possiamo verificare che c'è un intorno di x_0 in cui $\varepsilon < |l|$ e $l < \varepsilon$ (essendo l negativo), pertanto $l - \varepsilon < 0$ e $l + \varepsilon < 0$, e di conseguenza $f(x) < 0$.

. . . .

Teorema del confronto o del Carabiniere

Se una funzione è compresa fra altre due aventi lo stesso limite, essa ammetterà il loro stesso limite.

Avendo le funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $\phi(x)$ in $(a;\, b)$, ed essendo $f(x) \leq g(x) \leq \phi(x)$ con

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \phi(x) = l$$

dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x x_0} g(x) = l$$

Infatti, per la prima relazione

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < \phi(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) \leq \phi(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq \phi(x) < l + \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$$

ossia

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \phi(x) = l$$

6.1.1 Operazioni sui limiti

. . . .

Limite del prodotto di una costante e di una funzione

Consideriamo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ e lo trasformiamo in $\lim\limits_{x\to x_0} k\, f(x)$. A questo punto consideriamo 3 casi:

1. $k = 0$: $\lim\limits_{x\to x_0} 0 = 0$ essendo $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$;

2. $k > 0$: $l - \dfrac{\varepsilon}{k} < f(x) < l + \dfrac{\varepsilon}{k}$; possiamo dividere ε per k in quanto $k > 0$ e l'intervallo viene rispettato: $k\, l - \varepsilon < k\, f(x) < k\, l + \varepsilon$, ossia

$$\lim_{x\to x_0} [k\, f(x)] = k\, l$$

3. $k < 0$: ovvero $-k > 0$ e diventa

$$\lim_{x\to x_0} [-k\, f(x)] = -k\, l$$

$$\lim_{x\to x_0} [-k\, f(x)] = -\lim_{x\to x_0} [k\, f(x)] \; ;$$

essendo uguali i primi termini sono uguali i secondo termini, quindi:

$$-\lim_{x\to x_0} [k\, f(x)] = -k\, l\, .$$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} [k\, f(x)] = k\, l}$$

Il limite del prodotto di una costante ed una funzione è uguale al prodotto della costante e del limite della funzione.

. . . .

Somma di due limiti

Abbiamo $f(x)$ e $g(x)$ comprese nell'intervallo $(a;\, b)$. Stabiliamo che

$$\lim_{x\to x_0} = l_1 \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$$

con $l_1 \neq \infty$ e $l_2 \neq \infty$:

$$|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}\, .$$

Ma $|f(x) - l_1|$ è un intorno di x_0 come lo è $|g(x) - l_2|$, pertanto ci sarà unu intervallo comune a $|f(x) - l_1|$ e $|g(x) - l_2|$ che sarà intorno di x_0. Sommando membro a membro, dato che la somma di due valori assoluti è sempre uguale o maggiore del valore assoluto della somma

$$|f(x) - l_1 + g(x) - l_2| < \varepsilon$$

$$|(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)| < \varepsilon$$

ossia

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2}$$

Il limite della somma di due funzioni è uguale alla somma dei limiti delle funzioni.
Se $l_1 = -\infty$ e $l_2 = +\infty$ si ha il primo caso di indeterminazione, ossia $\boxed{-\infty + \infty}$.

. . . .

Differenza di due limiti

Considerando due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ comprese nell'intervallo $(a;\, b)$ stabiliamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$$

con $l_1 \neq \infty$ e $l_2 \neq \infty$.

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to x_0} [f(x) + (-g(x))] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} (-g(x))$$

Per un teorema precedente, questa scritta equivale a

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2}$$

Pertanto

Il limite della differenza di due funzioni è uguale alla differenza dei limiti delle funzioni.

Più genericamente possiamo dire

Il limite di una somma algebrica di due funzioni è uguale alla somma algebrica dei limiti delle funzioni.

. . . .

Limite del prodotto di due funzioni

Avendo $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, con $l_1 \neq \infty$ e $l_2 \neq \infty$ si distinguono due casi:

1. $l_1 = l_2 = 0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

$$\left|f(x) - \cancel{0}\right| < \varepsilon \qquad |g(x)| < \varepsilon$$

Possiamo moltiplicare membro a membro in quanto il prodotto di due valori assoluti è uguale al valore assoluto del prodotto

$$|f(x)| \cdot |g(x)| < \varepsilon^2$$

$$|f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon^2$$

ma siccome ε è piccolo a nostro arbitrio, $\varepsilon < 1$ per cui $\varepsilon^2 < \varepsilon$, e a maggior ragione

$$|f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon$$

ossia

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

2. Sappiamo che

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - R] = l - R\,.$$

Prendiamo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2\,,$$

cioè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - l_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) - l_2 = 0\,.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to x_0} [(f(x) - l_1) \cdot (g(x) - l_2)] = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\, g(x) - l_1\, g(x) - l_2\, f(x) + l_1\, l_2] = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\, g(x)] - \lim_{x\to x_0} [l_1\, g(x)] - \lim_{x\to x_0} [l_2\, f(x)] + \lim_{x\to x_0} (l_1\, l_2) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\, g(x)] - l_1 \lim_{x\to x_0} g(x) - l_2 \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} (l_1\, l_2) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\, g(x)] - l_1\, l_2 - \cancel{l_2\, l_1} + \cancel{l_1\, l_2} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} [f(x)\, g(x)] = l_1\, l_2}$$

Il limite del prodotto di due funzioni è uguale al prodotto dei limiti delle funzioni.
Se $l_1 = 0$ e $l_2 = \infty$ si ha il scondo caso di indeterminazione, ossia $\boxed{0 \cdot \infty}$.

. . . .

Limite di una potenza

Avendo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, vogliamo trovare $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n$.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \lim_{x \to x_0} \overbrace{[f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \ldots]}^{n} = \overbrace{\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) \ldots}^{n} = \overbrace{l \cdot l \cdot l \ldots}^{n} = l^n$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = l^n}$$

Il limite di una potenza è uguale alla potenza del limite.

. . . .

Limite del reciproco di una funzione

Consideriamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l \neq 0$ e $l \neq \infty$.

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Si può prendere $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$, pertanto si avrà

$$l - \frac{|l|}{2} < f(x) < l + \frac{|l|}{2}$$

Prendiamo due casi:

1. $l > 0$: $l - \dfrac{|l|}{2} = \dfrac{l}{2}$ e quindi $f(x) > \dfrac{l}{2}$;
2. $l < 0$: $l = -|l|$ e quindi $l + \dfrac{|l|}{2} = -|l| + \dfrac{|l|}{2} = -\dfrac{|l|}{2}$ e dalla seconda disuguaglianza si ha

$$f(x) < -\frac{|l|}{2}$$

$$-f(x) > \frac{|l|}{2}\,.$$

In entrambi i casi possiamo affermare che $|f(x)| > \dfrac{|l|}{2}$. Consideriamo ora che

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \left| \frac{f(x) - l}{f(x) \cdot l} \right| = \frac{|f(x) - l|}{|f(x)| \cdot |l|}$$

Sapendo che $|f(x) - l| < \varepsilon$,

$$\frac{|f(x) - l|}{|f(x)| \cdot |l|} < \frac{\varepsilon}{|f(x)| \cdot |l|}$$

ed essendo $|f(x)| > \left| \dfrac{l}{2} \right|$ allora $\dfrac{1}{|f(x)|} < \dfrac{1}{\left| \dfrac{l}{2} \right|}$ e possiamo scrivere

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|f(x) - l|}{|f(x)| \cdot |l|} < \frac{\varepsilon}{|f(x)| \cdot |l|} < \frac{\varepsilon}{\left| \dfrac{l}{2} \right| \cdot |l|} = \frac{2\,\varepsilon}{l^2}\,.$$

Essendo ε piccolo a nostro arbitrio, si ha comunque

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l} \right| < \varepsilon$$

ossia

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}}$$

Il limite del reciproco di una funzione è uguale al reciproco del limite.

. . . .

Limite del reciproco di una funzione che tende a zero

Avendo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

$$\left| f(x) - \cancel{0} \right| < \varepsilon \qquad \text{cioè} \qquad |f(x)| < \varepsilon$$

Invertendo

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| > M$$

con M grande a piacere; questa vuol dire

$$\boxed{\text{se} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty}$$

. . . .

Limite del reciproco di una funzione che tende a infinito

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

$$|f(x)| > M$$

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \frac{1}{M}$$

Ma $\dfrac{1}{M} = \varepsilon$, e quindi

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$$

ossia

$$\boxed{\text{se} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0}$$

. . . .

Limite del quoziente di due funzioni

Avendo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$, con $l_2 \neq 0$ e $l_2 \neq \infty$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = l_1 \cdot \frac{1}{l_2}$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}}$$

Il limite del rapporto di due funzioni è uguale al rapporto dei limiti delle funzioni.
Se $l_1 = l_2 = 0$ allora $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{0}{0}$.
Se $l_1 = l_2 = \infty$ allora $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{\infty}{\infty}$.
Si presentano così altri due casi di indeterminazione, ossia $\boxed{\dfrac{0}{0}}$ e $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$.

6.1.2 Continuità di una funzione

Una funzione si dice *continua* in un punto quando nel punto esiste la funzione, quando le punto esiste il limite, e quando tale limite è il numero che scaturisce dalla sostituzione di x con x_0. Se non si verificano questi 3 casi, la funzione è *discontinua*.

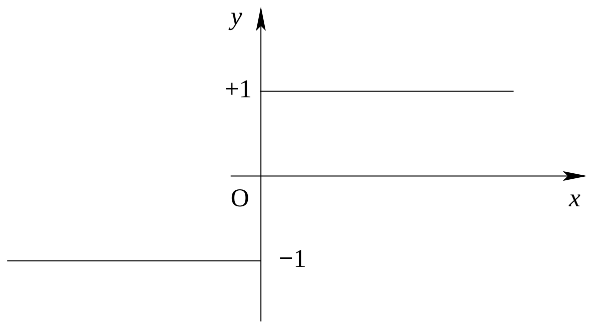
Vi sono 3 tipi di discontinuità:

1. Esistono il limite sinistro e il limite destro che, però, hanno valori diversi;

2. Uno dei due limiti non esiste o è infinito;

3. (Discontinuità Eliminabile) Nel punto non esiste la funzione ma esiste il limite.

Considerando la discontinuità di 1ˆ specie di una funzione, mediante la differenza del limite destro e del limite sinistro si può determinare il *salto della funzione*.



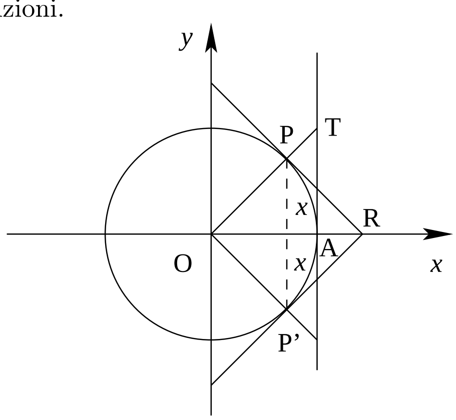
Salto della funzione: $1 - (-1) = 1 + 1 = 2$.

6.1.3 Teorema del limite notevole

Vogliamo calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Limitiamo lo studio nel I e nel IV quadrante, visto che per gli altri quadranti si ripetono i segni delle funzioni.



Prendiamo su una circonferenza goniometrica un arco x e portiamo le tangenti ai punti di intersezione dei raggi formanti l'angolo con la circonferenza. Tali tangenti si incontreranno nel punto R dell'asse x. Portiamo in A (punto origine degli archi) la relativa tangente.
Sappiamo dal postulato di Archimede che

$$\overline{\mathrm{P'P}} < \overset{\frown}{\mathrm{P'P}} < \overline{\mathrm{PR}} + \overline{\mathrm{RP'}}$$

Consideriamo i triangoli ORP e OAT, dove T è il punto di incontro fra la tangente in A e il prolungamento del raggio OP.

Detti triangoli sono uguali per essere rettangoli, per avere l'angolo $\widehat{O}$ in comune e per avere i lati $\overline{\mathrm{OP}}$ e $\overline{\mathrm{OA}}$ ugualu perché raggi della stessa cinrconferenza; in particolare avranno uguali $\overline{\mathrm{PR}}$ e $\overline{\mathrm{AT}}$.

Essendo $\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{RP'}} = \overline{\mathrm{AT}}$ abbiamo $\overline{\mathrm{P'P}} < \overset{\frown}{\mathrm{P'P}} < 2, \overline{\mathrm{AT}}$, ovvero

$$2\,\sin x < 2\,x < 2\,\tan x$$

$$\sin x < x < \tan x$$

Dividendo tutto per $\sin x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Invertendo

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Ma $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ e $\lim_{x\to 0} 1 = 1$. Per il teorema del carabiniere:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

La funzione del seno di un angolo diviso l'angolo tendente a zero ha per limite 1.

6.1.4 Limiti notevoli di Cavalieri

Avendo $\lim_{x\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+x}{x^2}$, sappiamo che

$$1+2+3+\ldots+x = S_1 = \frac{x\,(x+1)}{2}$$

pertanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\,(x+1)}{2\,x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+x}{x^2} = \frac{1}{2}}$$

Il rapporto della somma di x numeri in progressione aritmetica e del quadrato del loro numero ha per limite $\frac{1}{2}$ per $x \to \infty$.

. . . .

Avendo $\lim_{x\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+x^2}{x^3}$, sappiamo che

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+x^2 = S_2 = \frac{x\,(x+1)\,(x+2)}{6}$$

pertanto, continuando il limite di prima

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\,(x+1)\,(x+2)}{6\,x^3} = \frac{1}{6}\lim_{x\to\infty} \frac{x\,(x+1)\,(x+2)}{x^3} = \frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+2}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3}$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+x^2}{x^3} = \frac{1}{3}}$$

Il rapporto della somma di x quadrati di numeri in progressione aritmetica e del cubo del loro numero ha per limite $\frac{1}{3}$ *per* $x \to \infty$.

....

Avendo $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+3^3+\ldots+x^3}{x^4}$, sappiamo che

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+x^3 = S_3 = \left[\frac{x\,(x+1)}{2}\right]^2$$

Possiamo riscrivere quel limite sotto la forma

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\,(x+1)^2}{4\,x^{\cancel{4}\,2}} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{1^3+2^3+3^3+\ldots+x^3}{x^4} = \frac{1}{4}}$$

Il rapporto della somma di x cubi di numeri in progressione aritmetica e della quarta potenza del loro numero ha per limite $\frac{1}{4}$ *per* $x \to \infty$.

6.1.5 Il numero e di Nepero

Vogliamo dimostrare che

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e} \quad \text{con} \quad \boxed{e = 2.7182818284590 45\ldots}\,.$$

Il numero e è un numero irrazionale e trascendente: irrazionale perché è decimale illimitato; trascendente perché non c'è nessuna equazione a coefficienti razionali che dia per radice e.

Sappiamo che

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \binom{x}{0} + \binom{x}{1}\frac{1}{x} + \binom{x}{2}\frac{1}{x^2} + \binom{x}{3}\frac{1}{x^3} + \ldots + \binom{x}{x}\frac{1}{x^x}$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1+1+\frac{x\,(x-1)}{2!}\,\frac{1}{x^2} + \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{3!}\,\frac{1}{x^3} + \ldots + \frac{x\,(x-1)\,(x-2)\ldots\cdot 2\cdot 1}{x!}\,\frac{1}{x^x}$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)+\ldots+\frac{1}{x!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{x}\right)$$

Nel nostro limite $x \to \infty$ per cui $\frac{1}{x} \to 0$, pertanto

$$\left(1-\frac{1}{x}\right),\ \left(1-\frac{2}{x}\right),\ \left(1-\frac{3}{x}\right),\ldots > 0\,.$$

Tutte queste quantità sono positive e vengono tutte addizionate a 2; possiamo considerare tale somma priva della quantità da

$$\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

via via fino a

$$\frac{1}{x!}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{x}\right)$$

che, essendo tutte positive, trasformano tale somma in un numero minore di $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, ossia

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x > 2$$

Se però in tale somma oltre al 2 consideriamo anche i coefficienti fattoriali, dato che mancano i prodotti delle cifre in parentesi che sono > 0 e < 1, allora sarà

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{x!}$$

Se rendiamo il denominatore di una frazione minore di quello che è, sappiamo che il valore della frazione aumenta, perciò riscriviamo l'ultima somma con le seguenti sostituzioni:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{3 \cdot 2} \quad \text{sostituiamo 3 con 2:} \quad \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} \quad \text{sostituiamo 4 e 3 con 2:} \quad \frac{1}{2^3}$$

eccetera,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \dots + \frac{1}{2^{x-1}}$$

ma $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \dots + \frac{1}{2^{x-1}}$ è la somma dei termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, e sapendo che

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 2 + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{x-1}}}{\cancel{1 - \frac{1}{2}}}$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 2 + 1 - \frac{1}{2^{x-1}} < 2 + 1$$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 3$$

$$\boxed{2 < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < 3} \quad \text{E il limite è dimostrato.}$$

$$\begin{aligned} e \quad &\simeq \quad 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{x!} = \\ & \quad\ \ 2.000000000000 \dots + \\ & \quad\ \ 0.500000000000 \dots + \\ & \quad\ \ 0.166666666666 \dots + \\ & \quad\ \ 0.041666666666 \dots + \\ & \quad\ \ 0.008333333333 \dots + \\ & \quad\ \ 0.001388888888 \dots + \\ & \quad\ \ \dots \\ &= \quad 2.718281828459045 \dots \end{aligned}$$

6.1.6 Altri limiti notevoli

Vogliamo calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_a(x+1) = \lim_{x\to 0} \log_a(x+1)^{\frac{1}{x}}$$

Ponendo $x = \dfrac{1}{z}$, allora $z = \dfrac{1}{x}$, e se $x \to 0$, $z \to \infty$:

$$\lim_{x\to 0} \log_a(x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to\infty} \log_a \left(\frac{1}{z}+1\right)^z$$

Ma $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \left(\frac{1}{z}+1\right)^z = e$, perciò $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \log_a \left(\frac{1}{z}+1\right)^z = \log_a e$, pertanto

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e}$$

....

Vogliamo calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$$

Poniamo $a^x - 1 = z$, quindi $a^x = z+1$ ossia $\log_a(z+1) = x$; siccome se $x \to 0$ allora $a^x \to 1$, $a^x - 1 \to 0$, cioè $z \to 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\log_a(z+1)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a\,.$$

Pertanto

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a}$$

6.1.7 Limite di una funzione razionale intera

$$\lim_{x\to\infty} \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n\right) = \lim_{x\to\infty} x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)$$

Ma se $x \to \infty$, $\dfrac{a_1}{x} \to 0$, $\dfrac{a_2}{x^2} \to 0$, $\ldots \to 0$, quindi

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n\right) = \lim_{x\to\infty} a_0x^n}$$

6.1.8 Limite di una funzione razionale fratta

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m}$$

1. $n = m$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0}{b_0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \frac{a_0}{b_0}}$$

Il limite di una funzione razionale fratta con la variabile tendente all'infinito con numeratore e denominatore di uguale grado è uguale al rapporto dei coefficienti dei termini di maggior grado.

2. $n > m$:

$$n - m = r > 0\,,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0}\, x^{r} = \infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = \infty}$$

Il limite di una funzione razionale fratta con la variabile tendente all'infinito con il grado del numeratore maggiore del grado del denominatore è ∞.

3. $n < m$:

$$n - m = -r < 0\,,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0}\, x^{-r} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{1}{x^r} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m} = 0}$$

Il limite di una funzione razionale fratta con la variabile tendente all'infinito con il grado del numeratore minore del grado del denominatore è 0.

6.2 Derivate

Prendiamo una funzione

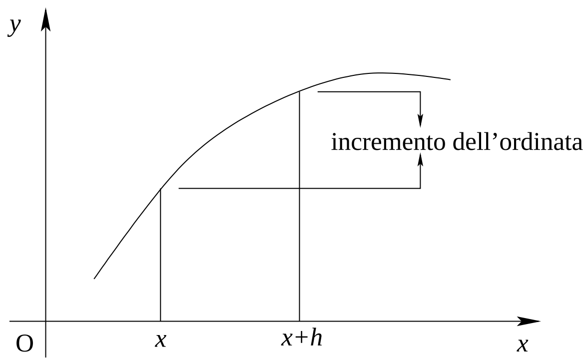
$$y = f(x) \qquad (a;\, b)$$

e alla variabile indipendente diamo un incremento h che può essere positivo, negativo o nullo. La funzione diventerà

$$y_1 = f(x+h)$$

Notiamo perciò che anche l'ordinata subisce un incremento nel passaggio d y a y_1. Per determinare l'incremento dell'ordinata basta fare la differenza

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$



Essendo $h = \Delta x$, il rapporto fra l'incremento che subisce l'ordinata e l'incremento che diamo alla variabile indipendente è detto rapporto incrementale.

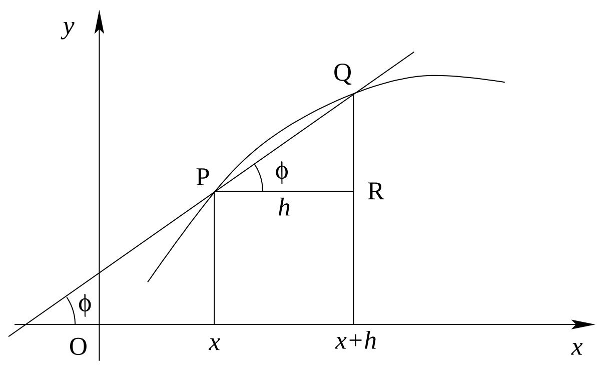
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si chiama derivata prima il limite, se esiste, del rapporto incrementale con l'incremento che tende a 0 dato alla variabile indipendente.

$$\boxed{y' = f'(x) = Dy = Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

6.2.1 Rappresentazione grafica del rapporto incrementale

Abbiamo la funzione $y = f(x)$



ed un suo punto P$(x;\, y)$. Dando alla variabile indipendente un incremento h, si trova un punto che chiameremo Q$(x+h;\, f(x+h))$. La retta che passa per P e Q avrà coefficiente angolare

$$m = \tan \phi$$

essendo ϕ l'angolo formato dalla retta col verso positivo dell'asse x. Dalla trigonometria si ha che

$$\overline{\mathrm{RQ}} = \overline{\mathrm{PR}}\,\tan\phi$$

essendo R il punto di incontro fra la parallela all'asse y dal punto Q e la sua perpendicolare dal punto P. Dalla suddetta relazione avremo:

$$\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}} = \tan\phi$$

Ma $\overline{\mathrm{RQ}} = f(x+h) - f(x)$, e $\overline{\mathrm{PR}} = h$, quindi

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} 0 \tan\phi = m$$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = m}$$

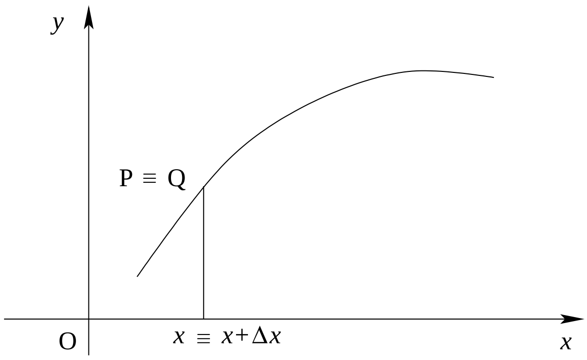
Il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta passante fra i dei punti della funzione, uno di ascissa x e l'altro di ascissa $x+h$.

6.2.2 Rappresentazione grafica della derivata di una funzione

Abbiamo

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se $\Delta x = 0$ il punto Q viene a trovarsi proprio sul punto P



Pertanto la retta passante dai due punti coincidenti sarà la tangente alla curva in quel punto $\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ sarà il limite del coefficiente angolare della tangente alla curva in un punto. Ma il limite di una costante è una costante, perciò

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\phi = m}$$

La derivata di una funzione rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva in un punto.

Avendo pertanto un punto $\mathrm{P}(x_0;\, y_0)$ e la curva $y = f(x)$ per portare la tangente alla curva per il punto P si calcola

$$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

6.2.3 Derivate particolari

Teorema 32.

$$\boxed{D\ \sin x = \cos x}$$

Infatti $f(x) = \sin x,\ f(x+h) = \sin(x+h)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\cancel{2}\cos\frac{2x+h}{2}\,\sin\frac{h}{2}}{\cancel{2}\frac{h}{2}} = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$D\sin x = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x$$

Teorema 33.

$$\boxed{D\ cosx = -\sin x}$$

Infatti $f(x) = \cos x,\ f(x+h) = \cos(x+h)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{-\cancel{2}\sin\frac{2x+h}{2}\,\sin\frac{h}{2}}{\cancel{2}\frac{h}{2}} = -\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$D\cos x = \lim_{h\to 0}\left[-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x$$

Teorema 34.

$$\boxed{D\,k = 0}$$

Da $y = k$ con k costante, $f(x) = k,\ f(x+h) = k$. Infatti andando a sostituire alla variabile indipendente se stessa aumentata dell'incremento, rimane, tale funzione, uguale a k, perché tale variabile non esiste.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k-k}{h} = 0$$

$$Dk = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Teorema 35.

$$\boxed{D\,x = 1}$$

Infatti $f(x) = x,\ f(x+h) = x+h$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x+k-x}{h} = 1$$

$$Dk = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Teorema 36.

$$\boxed{D\ [a \cdot f(x)] = a \cdot f'(x)}$$

$F(x) = a \cdot f(x)$, $F(x+h) = a \cdot f(x+h)$, $\Delta y = F(x+h) - F(x) = a \cdot f(x+h) - a \cdot f(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\, f(x+h) - a\, f(x)}{h} = a\, \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D\ [a \cdot f(x)] = \lim_{h \to 0} a\, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a\, \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \cdot f'(x)$$

. . . .

Teorema 37.

$$\boxed{D\, x^n = n\, x^{n-1}}$$

$$f(x) = x^n,\ f(x+h) = (x+h)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\binom{n}{0} x^n} + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n - \cancel{x^n}}{h} =$$

$$= n\, x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}$$

$$D\, x^n = \lim_{h \to 0} \left[n\, x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right] = n\, x^{n-1}$$

. . . .

Teorema 38.

$$\boxed{D\ \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e}$$

$f(x) = \log_a x$, $f(x+h) = \log_a (x+h)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{h}\ \log_a \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x}\, \frac{x}{h}\ \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\ \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

Poniamo $\dfrac{x}{h} = z$, per cui $\dfrac{h}{x} = \dfrac{1}{z}$; se $h \to 0$, $z \to \infty$

$$D\ \log_a x = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x}\ \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\ \lim_{h \to 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\ \lim_{z \to \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \frac{1}{x}\ \log_a e$$

In particolare se $a = e$, $D\ \log_a x = D\ \ln x = \dfrac{1}{x}\ \ln e = \dfrac{1}{x}$

. . . .

Teorema 39.

$$\boxed{D\, a^x = a^x \ln a}$$

$f(x) = a^x$, $f(x+h) = a^{x+h} = a^x\, a^h$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x\, a^h - a^x}{h} = \frac{a^x\ \left(a^h - 1\right)}{h}$$

$$Da^x = \lim_{h \to 0} \frac{a^x\ \left(a^h - 1\right)}{h} = a^x\ \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a$$

In particolare se $a = e$, $De^x = e^x$: il numero e è l'unico numero che ha per derivata se stesso.

6.2.4 Teoremi sul calcolo delle derivate

Teorema 40. *La derivata della somma di due funzioni è uguale alla somma delle derivate di ciascuna di esse.*

$F(x) = f(x) + g(x)$, $F(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$DF(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

$$\boxed{D\,[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)}$$

Teorema 41. *La derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla somma della prima funzione derivata per la seconda non derivata e della seconda derivata per la prima non derivata.*

$F(x) = f(x)\cdot g(x)$, $F(x+h) = f(x+h)\cdot g(x+h)$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} = \\ &= \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} = \\ &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h) + f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

$$\boxed{D\,[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)}$$

Teorema 42. *La derivata del prodotto di più funzioni è uguale alla somma di ciascuna funzione derivata per le altre non derivate.*

Si può fare la dimostrazione con 3 funzioni:

$$\begin{aligned}D\,[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)] &= D\,\{[f_1(x)\cdot f_2(x)]\cdot f_3(x)\} = \\ &= \{D\,[f_1(x)\cdot f_2(x)]\}\cdot f_3(x) + [f_1(x)\cdot f_2(x)]\cdot f_3'(x) = \\ &= f_1'(x)\,f_2(x)\,f_3(x) + f_1(x)\,f_2'(x)\,f_3(x) + f_1(x)\,f_2(x)\,f_3'(x)\end{aligned}$$

Pertanto

$$\boxed{D\,[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\ldots] = f_1'(x)\,f_2(x)\,f_3(x)\ldots + f_1(x)\,f_2'(x)\,f_3(x)\ldots + f_1(x)\,f_2(x)\,f_3'(x)\ldots}$$

Teorema 43. *La derivata di una funzione elevata a potenza è uguale all'esponente che moltiplica la derivata della funzione per la funzione elevata all'esponente diminuito di 1.*

$$D\,[f(x)]^n = D\overbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot f(x)\ldots}^{n \text{ volte}} = \overbrace{f'(x)\,\;[f(x)]^{n-1} + f'(x)\,\;[f(x)]^{n-1} + \ldots}^{n \text{ volte}} = n\,f'(x)\,[f(x)]^{n-1}$$

$$\boxed{D\,[f(x)]^n = n\,f'(x)\,[f(x)]^{n-1}}$$

. . . .

Teorema 44. *La derivata del rapporto di due funzioni è uguale al rapporto della derivata della prima funzione (numeratore) per la seconda non derivata diminuita della seconda funzione (denominatore) derivata per la prima non derivata, e del quadrato della seconda funzione.*

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}\,, \quad \Rightarrow \quad y\,g(x) = f(x)\,, \quad \Rightarrow \quad y'\,g(x) + y\,g'(x) = f'(x).$$

$$y' = \frac{f'(x) - y\,g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)}\,g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{[g(x)]^2}$$

Oppure $y = f(x)\ [g(x)]^{-1}$, da cui

$$y' = f'(x)\ [g(x)]^{-1} - f(x)\,g'(x)\ [g(x)]^{-2} = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\boxed{D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{[g(x)]^2}}$$

. . . .

Teorema 45. *La derivata della tangente di un angolo è uguale all'inverso del quadrato del suo coseno o al quadrato della tangente addizionata all'unità.*

$$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\boxed{D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$$

. . . .

Teorema 46. *La derivata della cotangente di un angolo è uguale all'antireciproco del suo seno o al quadrato della sua cotangente diminuito dell'unità.*

$$D\cot x = D\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)$$

$$\boxed{D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \cot^2 x\right)}$$

. . . .

Teorema 47. *Derivata di una funzione di funzione o funzione composta.*

$$y = f(z) \quad z = g(x) \quad y = f[g(x)]$$

Diamo un incremento Δx alla $g(x)$:

$$\Delta z = g(x + \Delta x) - g(x)$$

$$\Delta y = f(z + \Delta z) - f(z)$$

Vediamo cosa succede a Δz quando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta z = \lim_{\Delta x \to 0} [g(x + \Delta x) - g(x)] = g(x) - g(x) = 0$$

Quindi se $\Delta x \to 0$ anche $\Delta z \to 0$. Vediamo cosa succede a Δy quando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta z \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta z \to 0} [f(z + \Delta z) - f(z)] = f(z) - f(z) = 0$$

pertanto quando $\Delta x \to 0$, anche $\Delta z \to 0$ e $\Delta y \to 0$.

Possiamo scrivere che

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ è la derivata prima della funzione $y = f[g(x)]$;

$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z}$ è la derivata prima della funzione $y = f(z)$;

$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ è la derivata prima della funzione $z = g(x)$.

Possiamo scrivere

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

ossia, essendo y'_x la derivata prima della funzione $y = f[g(x)]$ rispetto alla x, $f'(z)$ la derivata prima della funzione $y = f(z)$ rispetto alla z, e $g'(x)$ la derivata prima della funzione $z = g(x)$ rispetto alla x, si può scrivere $y' = f'(z) \cdot g'(x)$. Quindi

$$\boxed{Df[g(x)] = f'(z)\, g'(x)}$$

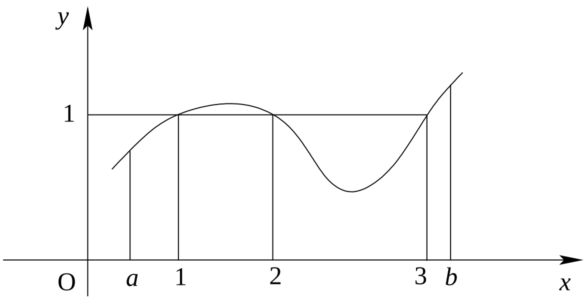
6.2.5 Funzioni invertibili

Consideriamo la funzione

$$y = f(x)$$

compresa e derivabile nell'intervallo $(a; b)$. Se ad un valore della x ne corrisponde un altro solo della y, allora la funzione in quell'intervallo è invertibile solo se è crescente o decrescente.

Avendo pertanto una funzione del tipo di figura **??**, non si può invertire perché ci sono tre valori della x a cui corrisponde uuno solo della y.



A questa regola fanno eccezione le funzioni goniometriche a delle condizioni particolari.

Consideriamo la funzione trigonometrica

$$y = \sin x\,.$$

Invertita diventa

$$x = \arcsin y\,,$$

ossia arco dell'angolo il cui seno è y. Essa è invertibile solo nell'intervallo

$$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\,.$$

Infatti solo nel 1° e 4° quadrante si verifica la condizione che ad angoli diversi corrisponde seno diverso. Nel 2° quadrante si può avere il seno uguale ad uno del 1° quadrante con angolo diverso. Così pure fra il 3° e 4° quadrante.

La funzione trigonometrica

$$y = \cos x$$

invertita diventa

$$x = \arccos y\,,$$

ossia arco dell'angolo il cui coseno è y. Per ragioni simili alle precedenti essa è invertibile solo nell'intervallo

$$0 \leq y \leq \pi\,.$$

Inoltre la funzione

$$y = \tan x\,,$$

che invertita diventa

$$x = \arctan y\,,$$

ossia arco dell'angolo la cui tangente è y, è invertibile nell'intervallo

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\,.$$

. . . .

Teorema 48. *Derivata di una funzione invertibile*

Consideriamo la funzione

$$y = f(x)$$

compresa, derivabile e invertibile nell'intervallo $(a;\, b)$, e consideriamo il suo inverso

$$x = F(y)\,.$$

Dando alla funzione $f(x)$ un incremento Δx, si avrà un incremento

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)\,.$$

Vediamo come varia Δy se $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = f(x) - f(x) = 0\,.$$

Quindi per $\Delta x \to 0$ anche $\Delta y \to 0$.

Diamo alla funzione inversa un incremento Δy: si avrà un incremento

$$\Delta x = F(y + \Delta y) - F(y)\,.$$

Vediamo come varia Δy se $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta x = \lim_{\Delta y \to 0} [F(y + \Delta y) - F(y)] = F(y) - F(y) = 0\,.$$

Quindi per $\Delta y \to 0$ anche $\Delta x \to 0$.

Ora sappiamo che

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

e pertanto

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

ma $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ è il rapporto incrementale della funzione $x = F(y)$, ossia

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = F'(y)$$

e $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ è il rapporto incrementale della funzione $y = f(x)$, ossia

$$\frac{1}{\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)} \, .$$

Perciò si può affermare che
La derivata di una funzione inversa è uguale a reciproco della derivata della funzione.

$$\boxed{F'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

. . . .

Teorema 49. *Derivata di* $\arcsin x$

$$y = \arcsin x$$
$$D \arcsin x = \frac{1}{D \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

1. Non c'è problema di segno perché la funzione è invertibile nel 1° e nel 4° quadrante;
2. Essendo $y = \arcsin x$ la funzione inversa di $x = \sin y$, si ha $\sin^2 y = x^2$, pertanto

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

perciò

$$\boxed{D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

. . . .

Teorema 50. *Derivata di* $\arccos x$

$$D \arccos x = \frac{1}{D \cos y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

. . . .

Teorema 51. *Derivata di* $\arctan x$

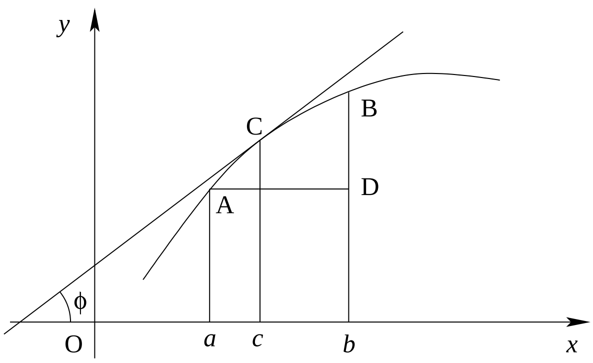
$$D \arctan x = \frac{1}{D \tan y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{D \arctan x = -\frac{1}{1 + x^2}}$$

6.2.6 Tabella sinottica delle derivate notevoli più comuni

Funzione	Derivata
$y = C$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n\, x^{n-1}$
$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y' = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x\, \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x\, \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$
$y = \arcsin\, x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \arccos\, x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = \arctan\, x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$

6.2.7 Teorema di Lagrange o di Cavalieri o del valor medio



Avendo una funzione continua e derivabile in un dato intervallo, la differenza che la funzione assume agli estremi dell'intervallo è uguale all'ampiezza dell'intervallo moltiplicata per la derivata della funzione in un punto interno all'intervallo.

Consideriamo

$$y = f(x) \qquad (a;\, b)\,,$$

C un punto generico della funzione nell'intervallo dato, e $y = m\,x + n$ la tangente alla curva nel punto C.

$m = \tan\phi =$, $\overline{\mathrm{AD}} = b - a$, $\overline{\mathrm{DB}} = f(b) - f(a)$, $\overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{AD}}\,\tan\phi$. Cioè

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)}$$

6.2.8 Teorema di Rolle

Se una funzione agli estremi di un intervallo assume valori uguali, esiste almeno un punto interno in cui si annulla la derivata prima.

Abbiamo $f(a) = f(b)$ e $f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$. Ma $f(b) - f(a) = 0$, quindi $(b - a)\, f'(c) = 0$.

Dato che $b - a$ non può essere 0, in quanto altrimenti non esisterebbe l'intervallo, per la legge dell'annullamento del prodotto deve essere per forza $f'(c) = 0$:

$$\boxed{f(b) = f(a) \quad \Rightarrow \quad f'(c) = 0}$$

In seguito vedremo che in questo punto vi sarà un massimo o un minimo assoluto della funzione in quell'intervallo.

6.2.9 Regola di de l'Hôpital

Quando nei limiti vi sono delle forme di indeterminazione frazionarie $\left(\dfrac{0}{0} \text{ o } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$*, il limite del rapporto di due funzioni è uguale al limite del rapporto delle derivate delle funzioni. Se l'indeterminazione non scompare, si passa alle derivate successive.*

Se abbiamo $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ oppure $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$, per qualsiasi valore a cui tende x, si ha

$$\boxed{\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

6.2.10 Studio di una funzione

. . . .

Il differenziale e il suo significato geometrico

Consideriamo

$$y = f(x) \qquad (a;\, b)$$

Poiché $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$, dove $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$. Pertanto essendo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

$f'(x)\,\Delta x$ è detto differenziale della funzione data nel punto considerato e si indica con

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\Delta x$$

Essendo $y = f(x)$

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\Delta x$$

Se $f(x) = x$

$$\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x = 1 \cdot \Delta x$$

quindi

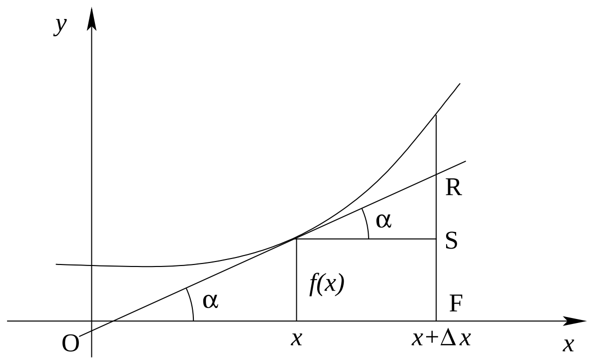
$$\boxed{\mathrm{d}x = \Delta x}$$

Il differenziale della variabile indipendente è uguale al suo incremento.

Così sarà anche $\mathrm{d}y = f'(x)\ \mathrm{d}x$, e quindi

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)}$$

La derivata prima di una funzione è il rapporto dei differenziali della variabile dipendente e della variabile indipendente.



$$\overline{\mathrm{FR}} = \overline{\mathrm{FS}} + \overline{\mathrm{SR}}$$

$$\overline{\mathrm{FR}} = f(x) + \Delta x\ \tan\alpha \quad (\tan alpha = m = f'(x))$$

$$\overline{\mathrm{FR}} = f(x) + \Delta x\, f'(x)$$

ma $\Delta x\, f'(x) = \mathrm{d}y$, con $\overline{\mathrm{SR}} = \mathrm{d}y$.

Il dy è la variazione che subisce l'ordinata della tangente quando si passa dal punto di ascissa x al punto di ascissa $x + \Delta x$.

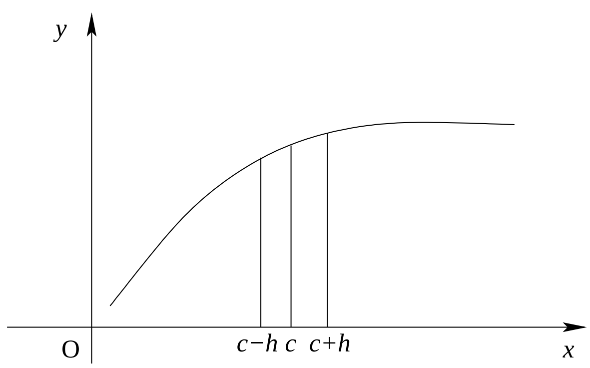
. . . .

Funzioni crescenti e decrescenti

Consideriamo la funzione

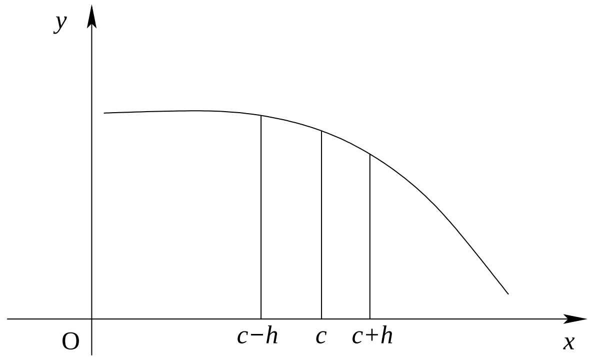
$$y = f(x) \qquad (a;\, b)$$

e la curva che rappresenta. Prendiamo un punto c su essa.



Se
$$\begin{cases} f''(c-h) > f(c) \\ f''(c+h) < f(c) \end{cases} \quad h > 0$$
la funzione è *crescente* in quel punto:

Se invece
$$\begin{cases} f''(c-h) < f(c) \\ f''(c+h) > f(c) \end{cases} \quad h > 0$$
la funzione è decrescente in quel punto:



Se queste condizioni si verificano in tutti i punti dell'intervallo, la funzione è crescente o decrescente in quell'intervallo.

. . . .

Teorema 52. *Se la derivata prima della funzione in un punto è maggiore di 0, la funzione in quel punto è crescente.*

$$\boxed{f'(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad y = f(x) \text{ crescente}}$$

$$y = f(x) \qquad (a;\, b)$$

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ quindi } f'(c) > 0 \text{ se } \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

$$\begin{cases} h > 0 \\ f(c+h) - f(c) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h < 0 \\ f(c+h) - f(c) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h > 0 \\ f(c+h) > f(c) \end{cases} \qquad \begin{cases} h < 0 \\ f(c+h) < f(c) \end{cases}$$

ma $f(c+h)$ con $h > 0$ è l'intorno destro della funzione nel punto c, e $f(c+h)$ con $h < 0$ è l'intorno sinistro della funzione nel punto c. Si verificano pertanto le condizioni di decrescenza nel punto c della curva.

. . . .

Teorema 53. *Se la derivata prima della funzione in un punto è minore di 0, la funzione in quel punto è decrescente.*

$$\boxed{f'(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad y = f(x) \text{ decrescente}}$$

$$y = f(x) \qquad (a;\, b)$$

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \text{ quindi } f'(c) < 0 \text{ se } \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0.$$

Per il teorema della permanenza del segno

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0$$

$$\begin{cases} h < 0 \\ f(c+h)-f(c) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h > 0 \\ f(c+h)-f(c) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h < 0 \\ f(c+h) > f(c) \end{cases} \qquad \begin{cases} h > 0 \\ f(c+h) < f(c) \end{cases}$$

ma $f(c+h)$ con $h > 0$ è l'intorno destro della funzione nel punto c, e $f(c+h)$ con $h < 0$ è l'intorno sinistro della funzione nel punto c. Si verificano pertanto le condizioni di crescenza nel punto c della curva.

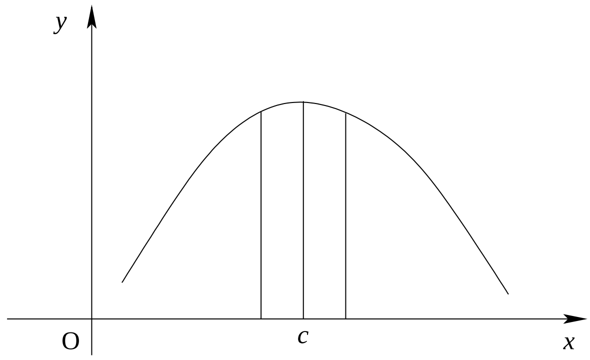
I teoremi non sono invertibili perché se la funzione è crescente in un punto non si può dire che la derivata sia positiva: essa può essere anche nulla. Analogamente per le funzioni decrescenti.

. . . .

Massimi e minimi

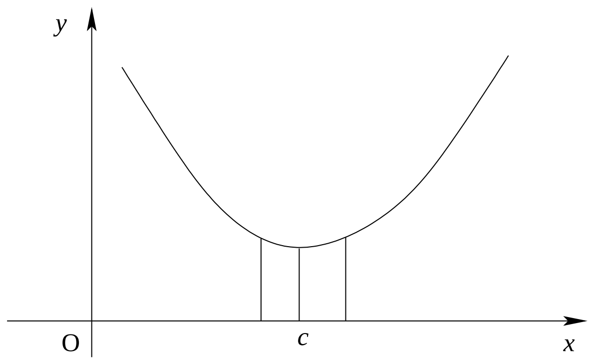
Un punto c di una curva $y = f(x)$ è di massimo quando in un intorno completo di c si verifica che

$$f(x) < f(c)$$



Un punto c di una curva $y = f(x)$ è di minimo quando in un intorno completo di c si verifica che

$$f(x) > f(c)$$



Questi punti di massimo e di minimo sono relativi se consideriamo solo l'intorno del punto; sono assoluti se cosnideriamo tutto l'intervallo di esistenza della funzione.

. . . .

Teorema 54. *Se in un punto c nell'intervallo $(a; b)$ la funzione presenta un massimo o un minimo, la derivata prima della funzione in quel punto si annulla.*

Considerando

$$y = f(x)\,, \quad (a;\, b) \quad c$$

Consideriamo i 3 casi:

1. $f'(c) > 0$
2. $f'(c) < 0$
3. $f'(c) = 0$

I primi due non si possono verificare perché abbiamo dimostrato che per

$f'(c) > 0$ la funzione cresce,

$f'(c) < 0$ la funzione decresce,

quindi per esclusione si verifica il 3° caso.

Il teorema non è invertibile perché se $f'(c) = 0$ ci può essere un massimo oppure un minimo, non si sa!

. . . .

Teorema 55. *Se la derivata prima di una funzione in un suo punto c si annulla e la derivata seconda è minore di 0, la funzione in quel punto presenta un massimo.*

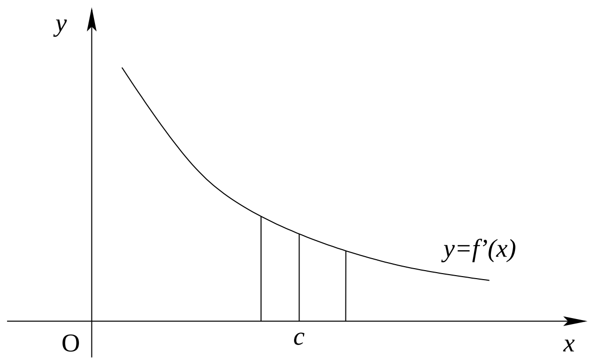
Considerando

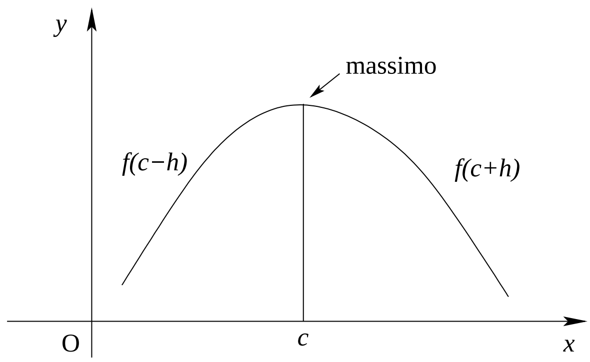
$$y = f(x)\,, \quad (a;\, b) \quad c$$

ip.: $\begin{cases} f'(c) = 0 \\ f''(c) < 0 \end{cases}$	th.: esiste un massimo

$$f''(c) = Df'(c)$$

Rappresentiamo la curva $y = f'(x)$; essa è decrescente in c, perché la sua derivata prima (ossia la derivata seconda della funzione y=$f(x)$) è sempre minore di 0 in c





Se la funzione è decrescente

$$\begin{matrix} f'(c+h) < f'(c) \\ f'(c-h) > f'(c) \end{matrix} \qquad h > 0$$

ma per ipotesi $f'(c) = 0$, perciò

$$\begin{matrix} f'(c+h) < 0 \\ f'(c-h) > 0 \end{matrix} \qquad h > 0$$

Per un teorema precedente sappiamo che se

$$f'(c+h) < 0 \quad \text{la funzione a destra di } c \text{ decresce,}$$

$$f'(c-h) > 0 \quad \text{la funzione a sinistra di } c \text{ cresce,}$$

perciò c'è un massimo.

. . . .

Teorema 56. *Se la derivata prima di una funzione in un suo punto c si annulla e la derivata seconda è maggiore di 0, la funzione in quel punto presenta un minimo.*

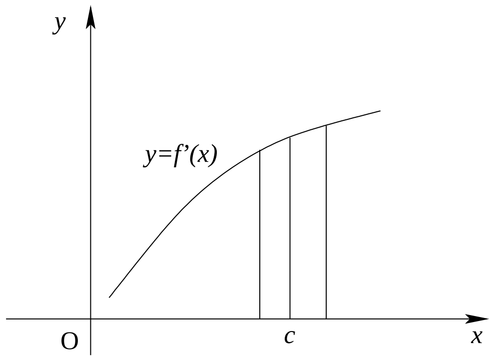
Considerando

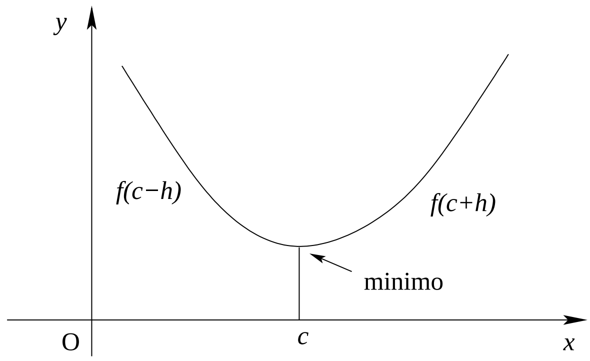
$$y = f(x)\,, \quad (a;\, b) \quad c$$

$$\boxed{\text{ip.: } \begin{cases} f'(c) = 0 \\ f''(c) > 0 \end{cases} \qquad \text{th.: esiste un minimo}}$$

$$f''(c) = Df'(c)$$

Rappresentiamo la curva $y = f'(x)$; essa è crescente in c, perché la sua derivata prima (ossia la derivata seconda della funzione y=$f(x)$) è sempre maggiore di 0 in c





Se la funzione è crescente

$$\begin{matrix} f'(c+h) > f'(c) \\ f'(c-h) < f'(c) \end{matrix} \qquad h > 0$$

ma per ipotesi $f'(c) = 0$, perciò

$$\begin{matrix} f'(c+h) > 0 \\ f'(c-h) < 0 \end{matrix} \qquad h > 0$$

Per un teorema precedente sappiamo che se

$f'(c+h) > 0$ la funzione a destra di c cresce,

$f'(c-h) < 0$ la funzione a sinistra di c decresce,

perciò c'è un minimo.

Concavità e convessità

Una funzione si dice concava, o con la concavità rivolta verso l'alto, quando in un intorno completo di un punto C la curva si trova tutta sopra la tangente in quel punto. È convessa, o con la concavità rivolta verso il basso, quando in un intorno completo del punto C la curva si trova tutta sotto la tangente in quel punto.

Si dimostra che

$$\boxed{\begin{matrix} f''(c) < 0 & \Rightarrow & \text{la funzione è convessa} \\ f''(c) > 0 & \Rightarrow & \text{la funzione è concava} \end{matrix}}$$

Flessi

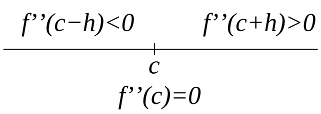
Un punto di flesso è il punto in cui la curva viene attraversata dalla sua tangente nel punto stesso.

Il punto di flesso è presente quando la derivata seconda si annulla:

$$\boxed{f''(c) = 0}$$

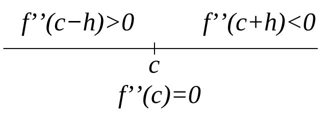
Però esiste solo se

$$\begin{cases} f''(c-h) < 0 \\ f''(c+h) > 0 \end{cases} \quad h > 0$$



In questo caso il flesso è ascendente, perché attraversa la tangente di flesso da sotto a sopra, procedendo nel verso delle ascisse positive.

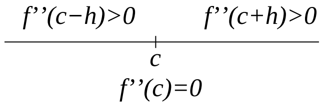
$$\begin{cases} f''(c-h) > 0 \\ f''(c+h) < 0 \end{cases} \quad h > 0$$



In questo caso il flesso è discendente, perché attraversa la tangente di flesso da sopra a sotto, procedendo nel verso delle ascisse positive.

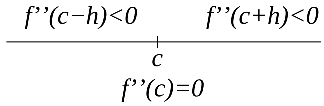
Se invece

$$\begin{cases} f''(c-h) > 0 \\ f''(c+h) > 0 \end{cases} \quad h > 0$$



oppure

$$\begin{cases} f''(c-h) < 0 \\ f''(c+h) < 0 \end{cases} \quad h > 0$$



in questi casi non è presente alcun flesso.

Nota: Per vedere se esiste il flesso in C, si passa a calcolare le derivate successive. Se la 1^ derivata che non si annulla è di ordine pari, si ripete il discorso per la derivata 2^, ossia esiste un massimo o un minimo. Se la prima derivata che non si annulla è di ordine dispari, allora vuol dire che in quel punto esiste un flesso (quel punto inteso come una radice della derivata 2^ eguagliata a 0). Se la tangente di flesso è parallela all'asse x, il flesso è orizzontale; se è parallela all'asse y, il flesso è verticale, altrimenti è obliquo.

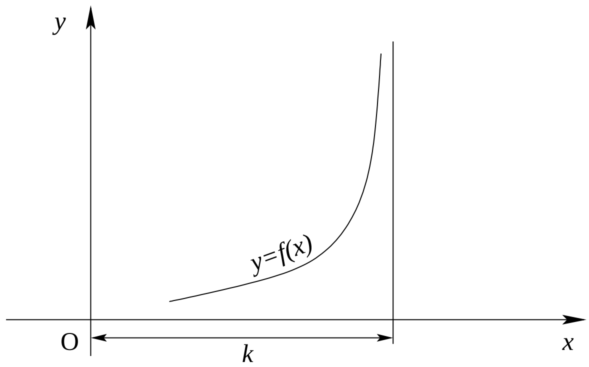
. . . .

Asintoti

Gli asintoti sono le tangenti alla curva all'infinito.

Esistono 3 tipi di asintoti: verticali, orizzontali, obliqui.

1. **Asintoti verticali**



La curva incontrerà l'asintoto nel punto

$$y = \infty \, .$$

Essendo $y = f(x)$ si ha un asintoto quando

$$\lim_{x \to k} f(x) = \infty$$

L'asintoto avrà equazione $\boxed{x = k}$.

Questo caso all'atto pratico si verifica con le funzioni fratte le quali per assumere il valore di ∞ si deve trovare quello che annulla il denominatore. Quest'ultimo valore è proprio k.

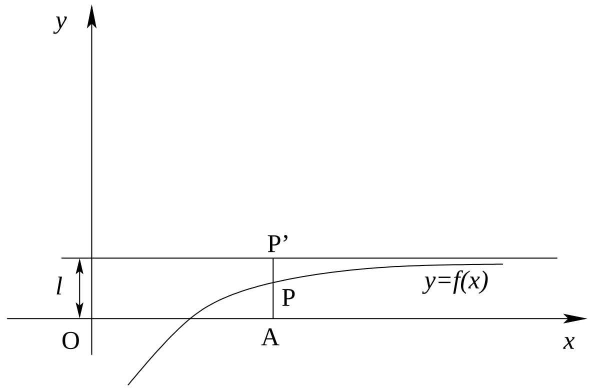
2. **Asintoti orizzontali**

La curva incontrerà l'asintoto nel punto

$$y = l \, ; \; x = \infty$$

l'equazione dell'asintoto orizzontale è

$$\boxed{y = l}$$



Quando la curva incontrerà l'asintoto, il segmento $\overline{\mathrm{P'P}}$ sarà nullo, perciò

$$\lim_{x\to\infty} \overline{\mathrm{P'P}} = 0$$

$$\overline{\mathrm{P'P}} = \overline{\mathrm{AP'}} - \overline{\mathrm{AP}} = l - f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} [l - f(x)] = \lim_{x\to\infty} l - \lim_{x\to\infty} f(x) = l - l = 0$$

Pertanto per trovare l'asintoto orizzontale si manda al limite la funzione facendo tendere x all'infinito.

N.B.: Se la funzione è trascendente o irrazionale, si fa tendere la x a $+\infty$ e $-\infty$.

Avendo

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{e chiamando}$$

p il grado del numeratore
q il grado del denominatore

per il teorema della funzione razionale fratta, mandando x al limite di ∞, se:

$$\begin{array}{lcll} p < q & \Rightarrow & y = 0 & \text{l'asintoto coincide con l'asse } x \\ p = q & \Rightarrow & y = k & \text{abbiamo un asintoto normale} \\ p > q & \Rightarrow & y = \infty & \text{non esiste asintoto orizzontale.} \end{array}$$

3. **Asintoti obliqui**

Abbiamo detto che se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

non esiste un asintoto verticale o orizzontale, ma può darsi sia obliquo. Vediamo ora quale altra condizione bisogna avere per trovare un asintoto obliquo

$$\lim_{x\to\infty} \overline{\mathrm{P'P}} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\overline{\mathrm{AP'}} - \overline{\mathrm{AP}}\right) = 0$$

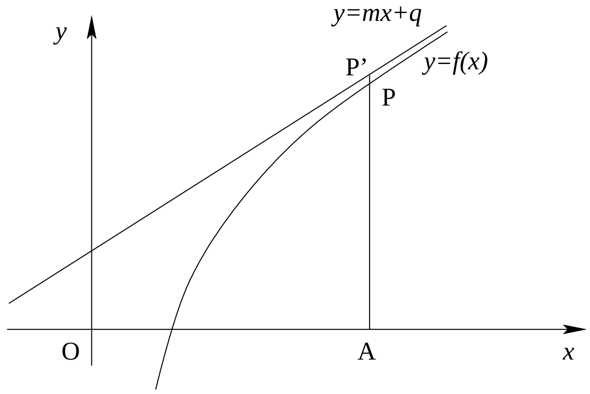
$$\overline{\mathrm{AP'}} = y = m\,x + q \qquad \overline{\mathrm{AP}} = f(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} [m\,x + q - f(x)] = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[m + \frac{q}{x} - \frac{f(x)}{x}\right] = 0$$

$$m + 0 - \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\boxed{m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$$



Questa è la seconda condizione. Inoltre

$$\lim_{x\to\infty}[m\,x+q-f(x)]=\lim_{x\to\infty}m\,x+\lim_{x\to\infty}q-\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

$$q=\lim_{x\to\infty}f(x)-\lim_{x\to\infty}m\,x$$

$$\boxed{q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-m\,x]}$$

Questa è la terza condizione.

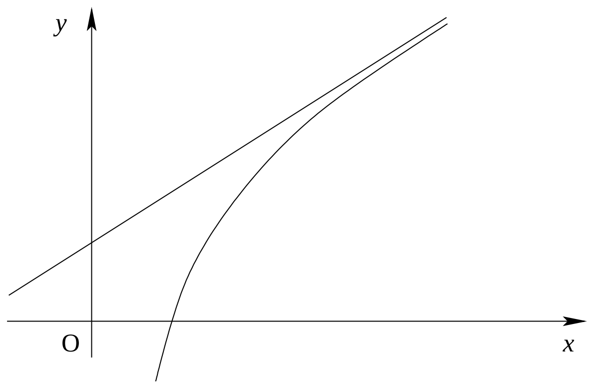
Riassumendo, le tre condizioni per ricavare un asintoto obliquo sono:

$$\boxed{\begin{gathered}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\\[1em] m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\\[1em] q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-m\,x]\end{gathered}}$$

....

Esiste anche un altro metodo per trovare gli asintoti obliqui, che però si può usare solo nelle funzioni razionali fratte del tipo:

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}$$



p	grado del numeratore
q	grado del denominatore
$p>q \quad\Rightarrow$	$\lim_{x\to\infty}=\infty$

Supponiamo $p = q + 1$, altrimenti $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ oppure $= 0$.
In questo caso

$$\frac{P(x)}{R(x)} = \frac{Q(x)}{m\,x + q}$$

Se $p = q + 1$, $m\,x + q$ sarà un polinomio di 1° grado.
Dalla divisione fatta:

$$P(x) = (m\,x + q)\,Q(x) + R(x)$$

essnedo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

$$y = \frac{(m\,x + q)\,Q(x) + R(x)}{Q(x)}$$

$$y = m\,x + q + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

se r è il grado di $R(x)$

$$y - (m\,x + q) = \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Logicamente $r < q$, perciò mandando al limite

$$\lim_{x\to\infty} [y - (m\,x + q)] = 0$$

$$y - (m\,x + q) = 0$$

dove y è l'ordinata della curva e $m\,x + q$ è l'ordinata sulla retta. Tale relazione diventa

$$y = m\,x + q$$

Essendosi eguagliate le ordinate sulla curva e sulla retta, vuol dire che la suddetta equazione è proprio l'equazione dell'asintoto.

Riassumendo

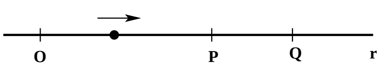
Per studiare una funzione si trova:

1. Campo di esistenza: tutti i valori di x tranne quelli che annullano il denominatore;
2. Asintoti: verticali, orizzontali, obliqui;
3. Intersezioni con gli assi;
4. Positività della funzione: si pone $y > 0$ e si trovano le x;
5. Crescenza, decrescenza, massimi, minimi e flessi;
6. Concavità e convessità.

6.2.11 Applicazioni fisiche delle derivate

Velocità di un corpo in moto

Consideriamo un punto che si muove di moto rettilineo su una retta r.



Indicando con O il luogo della retta in cui era situato il punto nell'istante $t = 0$ e con P quello in cui era nell'istante $t = t_0$, lo spazio OP percorso dal punto è una funzione di t_0, ossia varia al variare del tempo t_0:

$$s = f(t_0)\,.$$

Indichiamo con Q un ulteriore punto distante da P del tempo h: ossia, per raggiungere Q da P il punto impiega un tempo h; vediamo che

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{OQ} - \mathrm{OP}$$

Ma OQ è lo spazio percorso dal punto nel tempo $t_0 + h$, e OP è lo spazio percorso dal punto nel tempo t_0. Per cui, avendo visto che $s_{\mathrm{OQ}} = f(t_0)$:

$$s_{\mathrm{PQ}} = f(t + h_0) - f(t)\,.$$

Dalla Fisica sappiamo che la velocità è data dal rapporto dello spazio e del tempo; dopo esserci ricavati PQ e sapendo che il punto impiega un tempo h per percorrere PQ, la velocità del punto in questo spazio PQ sarà

$$v_{\mathrm{PQ}} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

che è la velocità media del punto lungo PQ.

Se il moto non è uniforme la velocità media varia col variare della distanza di Q da P, cioè col variare di h, ed in generale si constata che quando h è molto piccolo la velocità media varia di poco. Viene quindi naturale definire *velocità del punto mobile nell'istante* t_0 il valore del seguente limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

che non è altro che la derivata della funzione precedentemente vista:

$$s = f(t_0)\,.$$

Perciò si può dire che

$$\boxed{v = s' = f'(t_0)}$$

Teorema 57. *La velocità in un dato istante di un punto in moto rettilineo è la derivata dello spazio rispetto al tempo.*

. . . .

Accelerazione di un corpo in moto.

Ancora dalla Fisica sappiamo che la accelerazione a è la variazione della velocità nel tempo di un corpo mobile:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Abbiamo visto che $v = f'(t)$ e chiamiamo $f'(t_0) = F(t_0)$. Non essendo il mobile in moto uniforme, la variazione di velocità Δv dipende dalla variazione del tempo Δt, per cui, se vogliamo l'accelerazione del mobile in un determinato istante, essendo $F(t_0)$ la velocità del mobile in un istante t_0, ed $F(t_0 + h)$ in un istante $t_0 + h$, e $\Delta v = F(t_0 + h) - F(t_0)$,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h}$$

Siccome vogliamo l'accelerazione istantanea:

$$a_{\mathrm{ist}} = \lim_{h \to 0} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h}\,,$$

ossia

$$a_{\mathrm{ist}} = F'(t) = v' = s'' = f''(t)\,.$$

Perciò

$$\boxed{a = v' = f''(t)}$$

Teorema 58. *L'accelerazione istantanea di un punto che si muove di moto rettilineo è la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo.*

Sappiamo che per il secondo principio della dinamica

$$F = ma$$

per cui

$$\boxed{F = mv' = mf''(t)}$$

....

Intensità di una corrente elettrica

Supponiamo che attraverso una sezione di un filo conduttore in t secondi passi una quantità di elettricità $f(t)$. La differenza

$$f(t+h) - f(t)$$

rappresenta la quantità di elettricità passata attraverso quella sezione del conduttore nell'intervallo di tempo che va dall'istante t all'istante $t+h$. Il rapporto

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

chiamasi **intensità media della corrente considerata**. Il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$$

chiamasi **intensità della corrente** nell'istante t:

$$\boxed{i = f'(t)}$$

....

Coefficiente di dilatazione lineare

Sia $f(x)$ la lunghezza di una certa sbarra di metallo alla temperatura x. L'incremento

$$f(x+h) - f(x)$$

rappresenta l'allungamento subìto da tutta la sbarra nel passare dalla temperatura x alla temperatura $x+h$. Il rapporto

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

rappresenta l'allungamento medio della sbarra nell'unità di temperatura. Il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

rappresenta il **coefficiente di dilatazione lineare** della sbarra alla temperatura x.

6.3 Integrali

Considerando una funzione

$$y = f(x)$$

e $g(x)$ tale che $D\,g(x) = f(x)$

Definizione 23. *Si dice primitiva la funzione che derivata dà una funzione assegnata.*

Teorema 59. *Esistono infinite primitive di una stessa funzione.*

Se $D\,g(x) = f(x)$, anche $D[g(x)+c] = f(x)$, con c costante, dato che $D[g(x)+c] = D\,g(x) + D\,c = f(x) + 0 = f(x)$.

Teorema 60. *Se due funzioni sono primitive di una stessa funzione, si differenziano fra loro di una costante.*

Ipotesi: $D\,g(x) = f(x) \quad D\,\phi(x) = f(x)$
Tesi: $g(x) = \phi(x) + c$.

$$D\,g(x) = f(x)$$
$$D\,\phi(x) = f(x)$$

Sottraendo membro a membro

$$D\,g(x) - D\,\phi(x) = 0$$
$$D\,[g(x) - \phi(x)] = 0$$

ma 0 è la derivata di una costante, per cui $g(x) - \phi(x) = c \quad \Rightarrow g(x) = \phi(x) + c$.

Quindi

$$\boxed{\text{Se } D\,g(x) = D\,\phi(x) = f(x)\,,\ g(x) = \phi(x) + c}$$

6.3.1 Integrali indefiniti

Definizione 24. *Chiamasi integrale indefinito la totalità delle funzioni primitive di una funzione data.*

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = g(x) + c$$

Teorema 61. *La derivazione e l'integrazione sono funzioni inverse: $\cancel{D}\cancel{\int}$.*

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = g(x) + c$$
$$D\int f(x)\ \mathrm{d}x = D\,[g(x) + c]$$
$$D\int f(x)\ \mathrm{d}x = D\,g(x) + D\,c$$
$$D\int f(x)\ \mathrm{d}x = f(x)$$

La funzione com'era è rimasta dopo che si è fatta la derivata e l'integrale. Pertanto vale quanto detto sopra.

$$\boxed{k\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int k\,f(x)\ \mathrm{d}x}$$

$$D\, k \int f(x)\ \mathrm{d}x = k \cancel{D} \cancel{\int} f(x)\ \mathrm{d}x = k\, f(x)$$

integrando entrambi i membri:

$$\cancel{\int} \cancel{D}\, k \int f(x)\ \mathrm{d}x = \int k\, f(x)\ \mathrm{d}x$$

Cioè

Teorema 62. *Una costante moltiplicativa si può portare dentro o fuori l'integrale.*

. . . .

Teorema 63. *L'integrale di una somma algebrica di più funzioni è uguale alla somma dei singoli integrali.*

$$D \int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots]\ \mathrm{d}x = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

$$D \left[\int f_1(x) + \int f_2(x) + \ldots \right] \mathrm{d}x = D \int f_1(x) + D \int f_2(x) + \ldots = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

Essendo uguali i secondi membri, sono uguali anche i primi membri, pertanto

$$\boxed{\int f_1(x) + \int f_2(x) + \ldots = \int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots]\ \mathrm{d}x}$$

6.3.2 Integrazione per parti

Consideriamo il prodotto di due funzioni derivabili $u(x) \cdot v(x)$ e calcoliamone il differenziale

$$\mathrm{d}\,[u(x) \cdot v(x)] = v(x)\,\mathrm{d}u(x) + u(x)\,\mathrm{d}v(x) = v(x)\,u'(x)\ \mathrm{d}x + u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x$$

da cui

$$u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x = \ \mathrm{d}\,[u(x) \cdot v(x)] - u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x$$

Integrando entrambi i membri:

$$\boxed{\int u'(x)\,v(x)\ \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)\,v'(x)\ \mathrm{d}x}$$

Teorema 64. *L'integrale di un fattore finito per un fattore differenziale è uguale al prodotto del fattore finito per l'integrale del fattore differenziale, diminuito dell'integrale del fattore differenziale per l'altro fattore differenziale.*

6.3.3 Integrali notevoli

1. $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\displaystyle\int \mathrm{d}x = x + C$
3. $\displaystyle\int \ln\, x\,\mathrm{d}x = x\,\ln x - x + C$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
5. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$

6. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$

7. $\displaystyle\int \quad \mathrm{d}x = \tan x + C$

8. $\displaystyle\int \quad \mathrm{d}x = -\cot x + C$

9. $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$

11. $\displaystyle\int \cot x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

12. $\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

13. $\displaystyle\int [f(x)]^n \, f'(x) \,\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$

14. $\displaystyle\int f'(x) \sin f(x) \,\mathrm{d}x = -\cos f(x) + C$

15. $\displaystyle\int f'(x) \cos f(x) \,\mathrm{d}x = \sin f(x) + C$

16. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} \,\mathrm{d}x = -\cot f(x) + C$

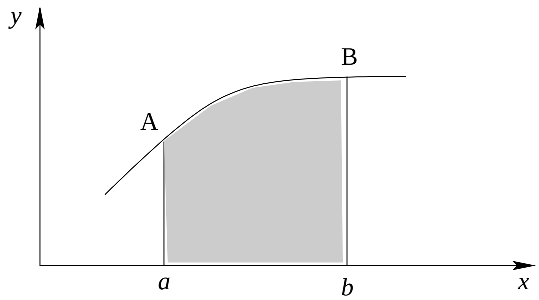
17. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} \,\mathrm{d}x = \tan f(x) + C$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

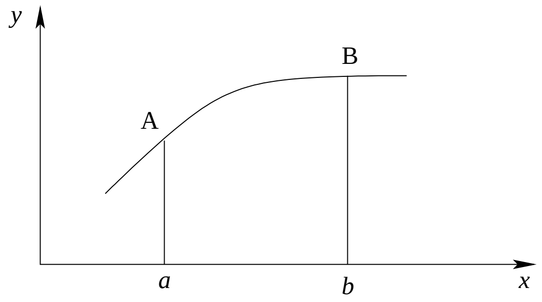
19. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + C$

6.3.4 Integrali definiti

Vogliamo calcolare l'area di una parte di piano compreso da una curva e l'asse x.



Tale parte di piano è detta **trapezoide**.
Il trapezoide è la parte di piano limitata da un arco di curva, due parallele all'asse y, e l'asse x.
Dividiamo il trapezoide in n parti



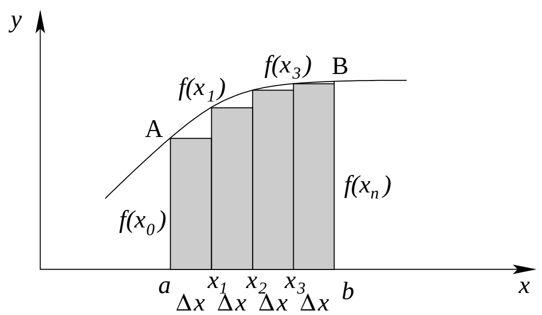
Diviso in n rettangoli, il trapezoide diventa un plurirettangolo o uno scaloide inscritto.

$$x_0 \equiv a;\ x_1;\ x_2; \ldots;\ x_{n-1};\ x_n \equiv b$$

Area scaloide inscritto s_n:

$$s_n = f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\,\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\mathrm{d}x$$

Consideriamo invece ora lo scaloide o plurirettangolo circoscritto:



Area scaloide circoscritto: S_n

$$S_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ \mathrm{d}x$$

Chiamando con s_1, s_2, s_3... le aree dei singoli rettangoli dello scaloide inscritto, e con S_1, S_2, S_3... le aree dei singoli rettangoli dello scaloide circoscritto, la somma $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$ è crescente man mano che si aumenta la suddivisione, mentre la somma $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$ è decrescente man mano che si aumenta la suddivisione. Pertanto

$$s_n < A(\text{trapezoide}) < Sn$$

Si ha l'area del trapezoide quando la $\sum_{k=0}^{n-1}$ eguaglia la $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$, cioè quando si compiono infinite suddivisioni; perciò:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\ \mathrm{d}x = A(\text{trapezoide})$$

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}$$

detto *integrale definito* perché rappresenta un numero, in quanto vi sono le limitazioni di a e b.

a e b sono gli estremi d'integrazione;

a è l'estremo inferiore;

b è l'estremo superiore.

6.3.5 Proprietà degli integrali definiti

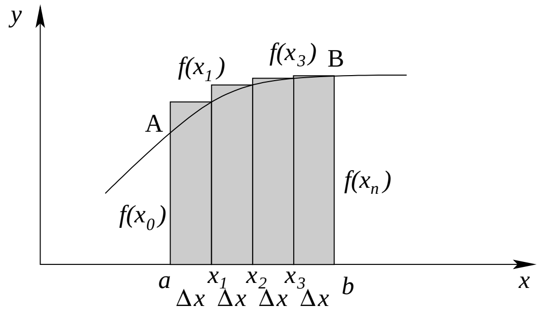
Per convenzione si accetta che

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

il che può essere giustificato anche intuitivamente.

. . . .

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x}$$

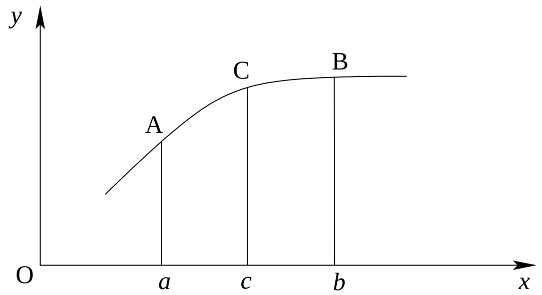


Da a a b, prendendo a come punto di riferimento, i valori delle ascisse sono positivi; da b ad a, prendendo b come punto di riferimento, i valori delle ascisse sono negativi.

. . . .

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

1° caso: $a < c < b$



$$S_1 = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad S_2 = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

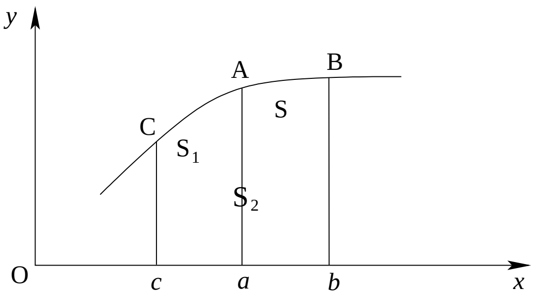
Sommando membro a membro:

$$S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ma $S_1 + S_2 = S = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ da cui

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2° caso: c non compreso fra a e b



$$S_1 = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \quad S_2 = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sottraendo membro a membro:

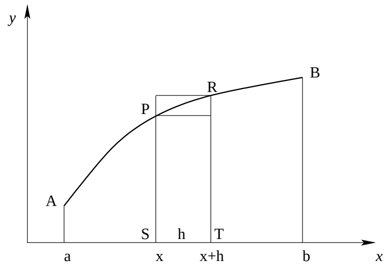
$$S_2 - S_1 = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ora, si sa che $-\int_c^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ per cui $S_2 - S_1 = \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$; ma $S_2 - S_1 = S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, da cui

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

6.3.6 Applicazioni degli integrali

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ continua e derivabile nell'intervallo $[a, b]$.



La scrittura

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

è una funzione perché varia al variare della x, un estremo è variabile. Tale funzione si indica con

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$$

ed è chiamata **funzione integrale**.

Teorema 65 (Teorema di Torricelli)**.** *La derivata della funzione integrale è uguale alla funzione integranda:*

$$\boxed{D\,F(x) = f(x)}$$

Riprendiamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}\,.$$

Vediamo che l'area del trapezoide STRP è

$$A_{\mathrm{tr}} = F(x+h) - F(x)$$

Essa è compresa fra l'area del rettangolo inscritto e l'area del rettangolo circoscritto:

$$f(x) \cdot h < F(x+h) - F(x) < f(x+h) \cdot h$$

dividendo tutti i membri per h:

$$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$$

e passando al limite per $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} f(x) < \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

Dato che conosciamo i limiti

$$\lim_{h\to 0} f(x) = f(x)$$

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

per il teorema del confronto possiamo scrivere

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

e perciò è dimostrato il teorema

$$\boxed{\mathrm{D}\, F(x) = f(x)}$$

Una conseguenza è che

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

da cui ovviamente

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Indicando con $\phi(x)$ la prima fra le primitive della $f(x)$, avremo

$$\phi(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Ponendo $x = a$:

$$\phi(a) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

ossia $\phi(a) = C$ da cui

$$\phi(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x + \phi(a)$$

Ponendo ora $x = b$:

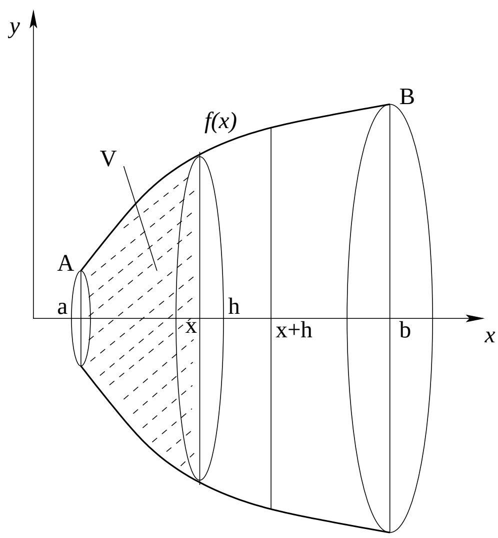
$$\phi(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \phi(a)$$

da cui

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \phi(b) - \phi(a)}$$

Da questa relazione possiamo affermare che:

Teorema 66. *Il valore di un integrale definito è dato dalla differenza dei valori che assume una primitiva generica una volta nell'estremo superiore e una volta nell'estremo inferiore.*



6.3.7 Volume di un solido di rotazione

Consideriamo una funzione $y = f(x)$ continua e derivabile nell'intervallo $[a, b]$. Il volume del solido di rotazione generato dalla rotazione della sua parte compresa fra a e x è $V(x)$, ed è variabile al variare di x.

La derivata di questa funzione è il limite del suo rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}$$

Notiamo che $V(x+h)-V(x)$ tende ad essere il volume di un cilindro compreso nell'intervallo $[x, x+h]$ quando $h \to 0$; infatti se $h \to 0$ il punto di ascissa $x+h$ si avvicina indefinitamente al punto di ascissa x e diventa quasi un cilindro, per cui quando $x + h \to x$ allora

$$V(x+h) - V(x) = \pi[f(x)]^2\, h$$

e

$$\lim_{h\to 0} \frac{\pi[f(x)]^2\, h}{h} = \lim_{h\to 0} \pi[f(x)]^2 = \pi[f(x)]^2\,,$$

da cui

$$V'(x) = \pi[f(x)]^2$$

e integrando si ottiene

$$V(x) = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, \mathrm{d}x$$

da cui

$$\boxed{V(x) = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, \mathrm{d}x}$$